I 24764

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL X.

ANUL 1930—1931.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMÂNEASCĂ"
1931

1939

'05

2014

I 24764

ANUL X. 15 MARTIE 1930 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. O SOLEMNITATE LA SCOALA POLITECHNICA DIN TIMISOARA.
2. NOTE MATEMATICE, 3, 4. 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 673, 770, 840, 850, 854, 857, 866.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

BIBLIOTEÇA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

2458

Rugăm a ni se trimite de urgență costul abonamentului la „R. M. T.", pentru a nu fi siliți a întrerupe trimiterea revistei.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din:

1. **Abason Ernest,** inginer, doctor în matematici, Justinian 20, Bucureşti.
2. **Abrameşcu N.,** doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj
3. **Adam D. Romeo,** sublt. de geniu, str. M. Gogâlniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu Maxim,** licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci Valeriu,** doctor în matematici, profesor la şc. Politechnică Timişoara, str. Gen. Foch 27, Timişoara.
6. **Alexandrescu El.,** profesoară la externatul secundar de fete, str. Argetoianu 7, Constanţa.
7. **Angelescu A.,** doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
8. **Angheluţă Th.,** doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
9. **Arghir Iancu,** profesor la liceul din Tg.-Jiu.
10. **Bădulescu Vasile,** profesor liceul M. Eminescu din Floreasca, Bucureşti.
11. **Balaban Gh.,** profesor la şc. secundară de fete gr. II, „Sturza Cantacuzino", Roman.
12. **Balaban N.,** profesor liceul Carol I, Craiova.
13. **Balasz D.,** inginer, asistent la şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
14. **Bănărescu Marin,** inginer la atelierele C. F. R., profesor la Politechnică, str. Doja 51, Timişoara
15. **Banciu I.,** prof., dir. general al contabilităţii în Ministerul de Instrucţie, str. Lucaci 95, Bucureşti.
16. **Baron Constantin,** asistent la catedra de fizică, şc. Politechnică, Timişoara.
17. **Blaşian V.,** inginer de mine, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
18. **Botez Mihai,** profesor la şc. normală şi liceul milit., str. Speranţei 12, Iaşi
19. **Bratu Gh.,** doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
20. **Breazu D.,** profesor la liceul din Caracal.
21. **Buicliu Gh.,** colonel în artilerie, Comandantul reg. 38 obuziere
22. **Burghele B.,** inginer, serviciul hidraulic Galaţi.
23. **Butoescu Traian,** inginer la uzina electrică Arad, asistent la şc. Politechnică.
24. **Cândea C.,** doctor-inginer, profesor la şc. Politechnică din Timişoara.
25. **Caraman E.,** director şc. normală Galaţi.
26. **Cârdeiu V.,** profesor la liceul Aron Pumnul, Cernăuţi.
27. **Chivulescu C.,** licenţiat în matematici, inspector financiar, Târgovişte.
28. **Cica Gh.,** profesor la şc, superioară de comert, Piteşti.
29. **Cismărescu M.,** licenţiat în matematici, inspector financiar, T.-Severin.
30. **Ciurceu V.,** inginer la uzina electrică Timişoara.
31. **Coman August,** profesor lic. C. Diaconovici-Loga conferenţiar la şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara.
32. **Constantinescu Gh..** profesor, Piaţa Elca 18, Craiova.
33. **Corneanu P.,** inginer la societatea Concordia Gura-Ocniţei, Dâmboviţa.
34. **Crăciunescu I.,** profesor la liceul Cantemir, Bucureşti.
35. **Cristescu I.,** inginer, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
36. **Demetrescu Gh.,** doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
37. **Diaconescu Nic.,** profesor, lic. din Slatina.
38. **Dimitriu-Arad I.,** profesor la liceul Moise Nicoară, str. Bucur 3, Arad.
39. **Dordea A. Traian,** profesor la liceul din Oltenita.
40. **Dragalina Corneliu,** lt.-colonel, str. general Dragalina No. 1, Bucureşti.
41. **Dumitrescu Gh.,** profesor, str. Gramont 16, Bucureşti.
42. **Duţulescu Marin,** licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Eminescu 20, Bucureşti.
43. **Florescu Mihai.** inginer inspector silvic, str. Alex. Orescu 9, Bucureşti.
44. **Georgescu D.,** profesor la liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
45. **Ghermănescu M.,** profesor la liceul Cantemir, str. Raion 31, Bucureşti.
46. **Hristea Horaţiu,** inginer la dep. C. F. R., asistent la şc. Politechnică, Timişoara.
47. **Hubert M.,** inginer-arhitect, bulevard. Mihai-Viteazul 21, Bucureşti.
48. **Ionescu K. C.,** directorul liceului real, Dr. Meşotă, Braşov.
49. **Jecu M. Ioan,** licenţiat în matematici, str. V. Lascăr (Teilor) 77, Bucureşti.
50. **Leonida D.,** inginer, prof. la şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
51. **Linteş I.,** căpitan de artilerle, str. Epicol 49, Bucureşti.
52. **Liteanu Gh.,** maior în artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
53. **Lupan Andrei,** inginer, director la Reşiţa, prof. la şc. Politechnică, str. Povernei 3, Bucureşti
54. **Magheru I.,** doctor în ştiinţe, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
55. **Manughevici C.,** inginer-chimist, şef de lucrări la şc. Politechnică, str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
56. **Mardan D.,** inginer-şef, directorul fabricei de tutun, profesor la şc. Politechnică din Timişoara, fabrica de tutun din Timişoara.

57. **Mihaly Elemér,** profesor la liceul din Deva.
58. **Mioc V.,** profesor la liceul Diaconovici-Loga, Timişoara.
59. **Naneş Gh.,** profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
60. **Nichifor Gh.,** doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti str. Racoviţă 32, Bucureşti
61. **Nicolau Alex.,** inginer, profesor la şc. Politechnică, Uzina electrică, Craiova.
62. **Nicolau Pompiliu,** inginer, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
63. **Niculescu Cristea,** inginer-şef, director general la soc. I. A. R. Arad.
64. **Noaghea Gh.,** profesor la liceul din Caransebeş.
65. **Oncica Ioan,** profesor la liceul Piteşti.
66. **Onicescu O.,** profesor universitar, Clopotarii-vechi 25, Bucureşti.
67. **Orăşeanu C.,** inginer-şef, licenţiat în matematici, prof. la şc. Politechnică, Bucureşti.
68. **Orăşeanu Gr.,** profesor la liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
69. **Otopeanu C.,** inginer.
70. **Petrescu A.,** doctor în matematici, directorul Academiei Agricole, Cluj.
71. **Petricoane D. M.,** directorul liceului din Oraviţa.
72. **Popescu E.,** doctor în chimie dela Sorbona, profesor la şc. Politechnică, Bucureşti.
73. **Purcariu Ilie,** director general, Ministerul de instrucţie publică, Bucureşti.
74. **Protopopescu I.,** inginer-şef, prof. şi subdirectorul şc. Politechnice, Timişoara.
75. **Raclis Nicolae Rod,** conferenţiar la universitatea din Bucureşti.
76. **Roibănescu C.,** profesor, Bulevard. I. C. Brătianu 7, Tg.-Jiu.
77. **Saegiu E.,** inginer-şef, serviciul construcţiei C. F. R., str. Berzei 70, Bucureşti.
78. **Şerbănescu Dumitru,** inginer la calea ferată Arad-Podgrie, asist. la şc. Politechnică.
79. **Sergescu P ,** doctor în matematici, licenţiat în filozofie, profesor la Universitatea din Cluj.
80. **Severineanu C.,** lnginer-şef, subdirectorul serviciului tracţiunei C. F. R., prof. la şc. Politechnică. Timişoara.
81. **Simniceanu Sava,** profesor, str. Griviţei 3, Craiova.
82. **Spineanu Cezar,** profesor, str. Vestei 24, Târgovişte.
83. **Stăncescu C.,** doctor-inginer, prof. la şc. Politechnică, str. Bem 8, Timişoara
84. **Stoicescu M.,** profesor, str. Zefirului 4, Bucureşti.
85. **Teodorescu C-tin,** inginer-şef, profesor la şc. Politechnică, direct. uzinele Reşiţa.
86. **Teodosiu Avram,** doctor în matematici, profesor la Academia de Agricultură Cluj.
87. **Thierrin Gabriel,** directorul inst. Schewitz Thierrin, Scaune 33, Bucureşti.
88. **Ţino Ovidiu,** doctor în matematlci, prof. şc. Politechnică Timişoara.
89. **Vâlcovici V.,** doctor în matematici, rectorul şc. Politechnice, str. Martirului 3, Timişoara.
90. **Vasiliu Gh.,** inginer la depozitul C. F. R., calea Traian 23, Satu-mare.
91. **Vasiliu M.,** inginer, asistent la şc. Politechnică Bucureşti, str. Obădeanu 10, Bucureşti.
92. **Vlad I., V.,** inginer-arhitect, profesor la şc. Politechnică, str. Bonnaz 20, Timişoara,
93. **Zapan Grigore,** căpitan aviator, str. Carol 8, Tecuci.

ANUL X — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timişoara
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara

O SOLEMNITATE LA ŞCOALA POLITECHNICA DIN TIMIŞOARA

In ziua de 27 Ianuarie 1930, Şcoala politechnică din Timişoara prin corpul ei didactic şi-a luat rămas bun dela d. colonel *Gheorghe Buicliu* care timp de nouă ani, dela înfiinţarea Şcoalei, a predat cursul de Geometrie analitică. D. colonel *Buicliu* fusese rugat ca în mod provizoriu, pânăce catedra va fi ocupată de un titular, să se însărcineze cu prelegerile de Geometrie analitică. Provizoratul a durat nouă ani, încât d. colonel *Buicliu* a luat parte activă la plămădirea şi la întărirea Şcoalei, la creşterea şi la evoluţia ei. Legături sufleteşti adânci s'au întreţesut în mod natural între profesorul provizoriu şi Şcoală. De aceea despărţirea d-lui colonel *Buicliu* de Şcoala politechnică atunci când profesorul titular, d. *Ovidiu Ţino,* a intrat în funcţiune, a fost un prilej al manifestării simţimintelor de recunoştinţă şi de afecţiune din partea Şcoalei pentru cel care o părăsea. *Revista matematică din Timişoara* care s'a bucurat chiar dela naşterea ei de preţioasa colaborare a d-lui colonel *Buicliu*, s'a asociat spontan şi entuziast prin cuvântul d-lui profesor *V. Alaci* la această manifestaţie academică a corpului didactic al Şcoalei politechnice din Timişoara.

Profesorii, conferenţiarii şi asistenţii Şcoalei politechnice i-au pregătit cu această ocazie un pergament semnat de toţi membrii corpului didactic al Şcoalei, pe care i l-a înmânat d. *Victor Vâlcovici,* rectorul Şcoalei politechnice din Timişoara, rostindu-i următoarele cuvinte :

Iubite Domnule Colonel,

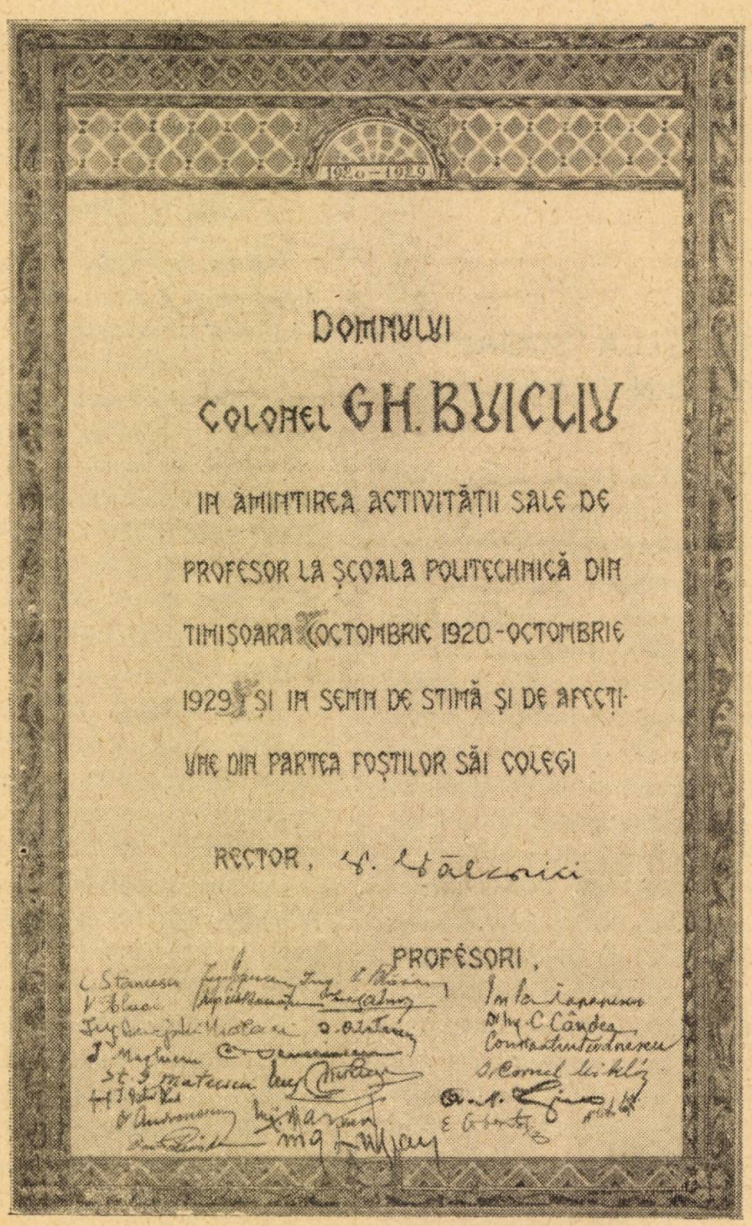
Luându-ne rămas bun dela D-ta ne-am adunat aici pentru a cinsti cei nouă ani de activitate plină de roade ca profesor de Geometria analitică. Ai început această activitate odată cu naşterea Şcoalei, alături de profesorul *Lalescu,* învingând greutăţi pe cari azi abia ni le putem închipui. Şi ca în toate operile mari, victoria D-v., a celor doi-trei profesori dela începutul Şcoalei, a hotărît de viaţa acestei instituţiuni : la sfârşitul primului an se ştia că Şcoala va trăi, mulţumită luptei curajoase şi plină de sacrificii pe care aţi angajat-o D-v., primii conducători sufleteşti ai primei studenţimi bănăţene.

Şcoala noastră îţi este recunoscătoare pentru această activitate pe care ai marcat-o cu un entuziasm tineresc şi cu o serioasă cultură ştiinţifică manifestate de altfel şi în alimentarea focului sacru al ştiinţei la *„Revista matematică din Timişoara“*.

Dar mai presus de toate ne-ai adus un înalt potenţial sufletesc şi un mare prestigiu moral legate de persoana D-tale, care au fost de mare folos tinerei instituţiuni.

Şcoala noastră îţi mai este recunoscătoare pentru modul înţelept cum ai ştiut să împaci disciplina militară cu atmosfera academică a Şcoalei în calitate de comandant militar al ei. Iar noi cu toţii ne mândrim că te-am avut ani dearândul printre noi : coleg, sincer şi preţios camarad în toate momentele, şi de bucurie şi de îndoială.

In numele membrilor corpului didactic al Şcoalei politechnice din Timişoara, te rog, să primeşti acest modest semn al mărturisirii noastre că figura Colonelului *Buicliu* va rămâne vecinic în memoria noastră învăluită în atmosfera de afectuoasă camaraderie pe care ai creat-o în jurul D-tale.


1920 — 1929

DOMNULUI

COLONEL GH. BUICLIU

ÎN AMINTIREA ACTIVITĂȚII SALE DE PROFESOR LA ȘCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIȘOARA (OCTOMBRIE 1920-OCTOMBRIE 1929) ȘI ÎN SEMN DE STIMĂ ȘI DE AFECȚIUNE DIN PARTEA FOȘTILOR SĂI COLEGI

RECTOR, Gh. Bălcescu

PROFESORI,

PERGAMENTUL OFERIT D-LUI

COLONEL GH. BUICLIU

D. Profesor *V. Alaci*, rosteşte apoi următoarea cuvântare:

Domnule Rector,
Domnilor Colegi,

D. Colonel *Buiclîu* este bine cunoscut nu numai în rândurile armatei, dar şi în ogorul ştiinţei şi în diferite societăţi, care şi-au propus să promoveze anumite idei sociale sau ştiinţifice.

Atât armata, cât şi ştiinţa, cât şi diferitele societăţi, îl revindecă ca pe un element de valoare şi cu drept cuvânt, pentrucă în toate aceste domenii D-sa a manifestat o activitate bogată şi intensă.

Imi daţi mie voie, ca unul a cărui specialitate este mai apropiată de acea a D-sale, din ogorul ştiinţei să vorbesc pe scurt de activitatea sa ştiinţifică, activitate pe care o cunosc mai bine.

Imi aduc cu drag aminte, de timpul când eram pe băncile liceului *Codreanu* din Bârlad, între 1901 — 1905, că admiram în coloanele *„Gazetei Matematice“* pe unul din corespondenţii cei mai activi şi profunzi, pe corespondentul *Gh. Buicliu*, care se releva ca un rezolvitor constant al problemelor celor mai delicate, celor mai dificile, — apoi ca propunător de astfel de probleme, ca autor de articole şi note matematice, în care se întrevedea un spirit fin şi adânc pătrunzător. Mai târziu D-sa ajunge să fie ales membru la *„Gazeta Matematică“* şi face parte chiar din comitetul de direcţie, unde pune aceiaşi hărnicie şi pricepere şi se distinge şi ca un bun îndrumător al corespondenţilor Gazetei.

Această activitate, această pasiune pentru matematici l'a preocupat continu şi atunci când Şcoala politechnică din Timişoara face apel la cunoştinţele D-sale, şi îi încredinţează catedra de *Geometrie analitică*, găseşte în D-sa unul din elementele pregătite, constituind unul din stâlpii puternici ai acestei Şcoli, tocmai în momentele grele dela început.

Această pasiune, această dragoste de ştiinţă, îl preocupă şi astăzi cu aceiaşi intensitate, şi astăzi D-sa închină cu drag activităţii matematice, puţinele momente libere pe care i le îngădue cealaltă activitate, aceea de militar. Sunt luni, când D-sa are articole în mai multe reviste; astfel în Septembrie anul trecut, a publicat un articol în *„Revista Matematică“*, altul în *„Gazeta Matematică“* şi altul în *“Revista Artileriei“*. Sunt sigur că dacă D-sa ar fi rămas să lucreze numai în ogorul matematic, ar fi fost unul din pionierii străluciţi a-i acestui domeniu.

De aceea astăzi, când sărbătorim pe d. Colonel *Buicliu* pentru activitatea sa de nouă ani la această Şcoală, găsesc prilejul nimerit să-i aduc omagiul meu de admiraţie, pentru puterea sa de muncă, pentru spiritul său fin şi adânc observator şi pentru modul plăcut cum ştie D-sa să se comporte în mijlocul societăţii. Trăiască d. Colonel *Buiclîu*.

D. Colonel *Gh. Buicliu*, luând cuvântul răspunde următoarele:

Domnule Rector,
Domnilor Profesori,
Domnilor Asistenţi,

In primele clipe ale unirei provinciilor româneşti, atunci când haosul războiului stăpânea încă proaspăt întreaga activitate a ţării, regretatul *Tr. Lalescu* a creiat din nimic Şcoala politechnică din Timişoara. După cum, în genialitatea lui matematică, învingea dificultăţile de rezolvarea problemelor prin scânteietoare artificii de inspiraţie, de inprovizaţie, tot aşa pentru învingerea greutăţilor începutului, mai ales în ce priveşte personalul didactic al Şcoalei politechnice, nu a ezitat să se adreseze oriunde a crezut că găseşte o fărâmă de energie pe care să o poată utiliza.

Astfel, în toamna anului 1920, mi s'a adresat şi mie.

Dupăce mi-a expus planul înfiinţărei unei Şcoli politechnice în Timişoara şi greutatea de a găsi profesori cu care să învingă inerţia începutului, mi-a cerut să-l sprijin şi eu şi să primesc a preda în mod provizoriu *Analiza* sau *Analitica*. Prietenia care mă lega de *Lalescu*, entuziasmul cu care mi-a vorbit şi, mărturisesc, mândria de a contribui cu atât cât pot puterile mele pentru a pune în mişcare o aşa de dominantă instituţie culturală m'au hotărît să primesc a profesa Analitica, rămânând ca Analiza să o predea deocamdată *Lalescu*.

Iată, vă citesc şi raportul pe care l-am adresat atunci şefilor mei militari, cerându-le să sancţioneze cu aprobarea lor eventuala mea activitate extramilitară.

„Am onoare a raporta că am fost solicitat verbal şi în „scris, să predau anumite cursuri la Şcoala politechnică „ce se înfiinţează la 15 Noembrie în Timişoara şi la „Şcoala de meserii din localitate. Numărul de ore de „profesat este de maximum 6 pe săptămână".

„Având în vedere că în perioada actuală de consoli- „dare a ţărei, armata şi-a pus elementele ei la contri- „buţie în toate ramurile de activitate a ţărei şi consi- „derând că propunerea ce mi se face este un omagiu „de încredere ce se aduce ofiţerilor noştri, nu am şovăit „a răspunde afirmativ la propunerea ce mi s'a făcut, „având credinţa că surplusul de muncă pe care-l voi „depune temporar în această activitate extramilitară „umple un mare gol în criza de personal care se află „acum în învăţământ".

„Totuşi am condiţionat răspunsul meu sub rezerva „aprobărei autorităţilor militare superioare".

„Cu ocazia vizitei, făcută Şcoalei speciale de către d-l „Ministru de Război[1]), d-l Prefect al judeţului a comu- „nicat d-lui Ministru propunerea ce mi s'a făcut, iar d-l „Ministru a răspuns că aprobă şi speră că şi noi o să „ne servim de obolul intelectual al Şcoalei politechnice".

„Cu onoare, vă rog, să binevoiţi a interveni să mi se „se dea şi o aprobare scrisă în senzul celei verbale a „d-lui Ministru".

„Personal, asigur că voi aranja orele de predat aşa „încât nimic să nu sufere în însărcinările pe care le-am, „iar materiile pe care le voi preda sunt de aşa natură „încât profesarea lor nu-mi vor răpi din timpul pe care „mi-l acord culturei militare ci din acela destinat re- „pausului".

Timişoara, 9 Noembrie 1920.

Iată, Domnilor, împrejurările care mi-au dat onoarea să încep a preda Analitica la deschiderea anului şcolar 1920.

Mărturisesc că începutul mi-a dat mult de lucru. Organizarea Şcoalei speciale a artileriei care se reînfiinţa după război, calitatea neomogenă a primei serii de studenţi, lipsa de programe ghid, ba chiar lipsa de cărţi şi biblioteci din acele vremuri, împovăra mult munca unui profesor versat, cu atât mai mult pe a unuia improvizat.

Conştient că opera începută este de natura acelor care supravieţuesc, nu am şovăit în faţa nici unei greutăţi şi ne-am identificat cu suflul sănătos care a prezidat la înfăptuirea şi conducerea acestui institut.

Se vede că „il n'y a que le provisoire qui dure" conţine ceva adevăr, căci provizoratul meu a durat mai mult decât mă aşteptam.

D. Rector a expus aprecierea D-v. şi a D-sale asupra activităţii mele la Şcoala politechnică în aceşti nouă ani, apreciere pe care o manifestaţi aşa de distins prin acest pergament.

Vă mulţumesc din suflet de acest fel de apreciere; el dovedeşte că D-v. nu posedaţi numai ştiinţa de a realiza în domeniul tecnic, dar că aveţi delicateţe sufleteşti de esenţa celei mai artistice fineţe şi că doleanţele *Regelui Ferdinand,* exprimate la inaugurarea pavilionului de mecanică s'au realizat întocmai: Şcoala politechnică din Timişoara nu este numai o construcţie în care se elaborează proecte şi se dau diplome, ci este şi un suflet, în care vibrează cele mai înalte şi fine simţiminte.

D-lor, din balanţa activităţii mele la Şcoala politechnică, despre care d. Rector a vorbit în termeni exagerat de măgulitori, eu rămân beneficiarul unui patrimoniu sufletesc pe care-l socotesc de o foarte preţioasă valoare. Rămân beneficiarul prieteniilor D-v. de preţ şi în particular, mărturisesc cu toată sinceritatea, beneficiarul prieteniei d-lui *Vâlcovici* pe care o preţuesc cu atât mai mult cu cât o intimitate mai susţinută cu dânsul, m'a pus în măsură să-i apreciez de aproape calităţile de hărnicie, de idealism curat şi integral, de morală superioară, de orizont larg văzător, de gânditor şi om de cultură, care-l fac să fie disputat, revendicat de toate universităţile noastre.

In clipa în care sunt nevoit să-mi iau rămas bun dela D-v., mulţumesc cu recunoştinţă memoriei lui *Tr. Lalescu* care mi-a prilejuit să mă înbogăţesc cu comoara acestor prietenii, mulţumesc din suflet D-v. tuturor pentru darul ce-mi faceţi, mulţumesc d-lui *Alaci* pentru aprecierile mult prea exagerate pe care a binevoit să le facă asupra muncei mele matematice, şi vă urez D-v. d-le Rector, că acolo unde sunteţi chemat, se aveţi mulţumirea înfăptuirilor cu acelaşi succes pe care l-aţi avut aici, iar D-v. Domnilor profesori şi Domnilor asistenţi, vă urez din tot sufletul să desăvîrşiţi Şcoala pe care o aveţi pusă pe un drum aşa de bun şi să o duceţi în scurt timp la renumele şi înălţimea celor mai de seamă instituţii similare occidentale.

1) Ministru de războiu era d-l General *I. Răşcanu.*

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra problemei 784.* In mod analog se poate arăta că expresiunea:

$$(\alpha+2\beta)x^8+2\,.\,x^4(\beta a^2+\alpha a)+\alpha a^2$$

se poate descompune astfel:

$$\alpha(x^4+a)^2+\beta(x^4+x^2a)^2+\beta(x^2-x^2a)^2.$$

In cazul problemei 784, avem:

$$\alpha=\beta=1,$$

Asupra problemei 826. Dacă nu s'ar fi pus condiția ca factorii numărului să fie primi, atunci:

$$abcd=3\times\alpha 43=100(3\alpha+1)+29.$$

Rezultă deci că:

$$a+b=10,$$

iar $\alpha<3$, prin urmare avem soluțiunile:

1929 și 2829.

CAP. I LINTES

2. *Asupra notei 22 din „R. M.", IX, (pag. 99).* 1) Exemplul N = 6 nu este corect luat de oarece în nota No. 49 din „G. M." XXIX, pag. 297, se specifică că avem:

$$(a-1)^n\,.\,(b-1)^n\ldots\geqq a^{n-\alpha}\,.\,b^{n-\beta}\ldots$$

pentru $a>2$, etc.

Explicația că:

$$\lim\left[\frac{\varphi(N)}{N}\right]^n=0$$

dacă x tinde către ∞ este exactă în algebră, dar nu în cazul nostru, de oarece x tinde cel mult către n, iar n este perfect definit prin relația:

$$\varphi_n(N)=2.$$

Observație. In inegalitatea:

$$[\varphi(N)]^x\geqq N^{x-1}$$

este sigur că x depinde și de factorii lui N și de exponenții factorilor, ori valoarea lui x pentru care am avea neegalitatea de mai sus este n. Dar aceasta nu înseamnă că lui x nu i se poate găsi o altă valoare și mai simplă.

Asupra notei 23 din aceiași revistă. Se afirmă că „demonstrația" este *greșită.* Dar nu este vorba de nici o demonstrație. Am dat numai niște formule pentru A și B, astfel încât indicatorul lui A^m sa fie de forma B^n.

D-l *Popovici* de altfel complectează formulele, afirmând că ele nu pot subzista în realitate decât dacă m și n sunt primi între ei. Este o precizare mai mult, atât.

de CAP. I. LINTES

3. *Generalizarea problemei 819.* Această problemă rezolvată în „R. M. T.", vol. IX, pag. 105, generalizată devine.

Se cere suma:

$$S=a_1\,0\,a_1+b_2\,0\,0\,b_2+\ldots+a_m\,0\ldots0\,a_m,$$

unde:

$$a_i=a_1+(i-1)\,r,$$

și:

a_1 are β_1 cifre, a_2 are β_2 cifre, ...

unde:

$$\beta_i=\beta_1+(i-1)\,r_1.$$

Avem:

$$S=a\,.\,10^{\beta_1+1}+a+(a+r)\,10^{\beta_2+2}+\ldots$$

$$\ldots+[a+(m-1)\,r]\,10^{\beta_m+m}$$

$$S=a\sum_{i=1}^{m}10^{\beta_i+1}+r\sum_{i=1}^{m}10^{\beta_i+1+i+1}\,i+$$

$$r\sum_{i=1}^{m-1}i+m\,a.$$

Vom avea:

$$a\sum_{i=1}^{m}10^{\beta_i+i}=a\left[10^{\beta_1+1}+10^{\beta_2+2}+\ldots+10^{\beta_m+m}\right]$$

$$=a\,(10^{\beta_1+1}+10^{\beta_1+2\,r_1+2}+\ldots+10^{\beta_1+m\,r_1+m})$$

$$a\sum_{i=0}^{m}10^{\beta_i+i}=10^{\beta_1+1}\left[1+10^{2r_1+1}\,\frac{10^{(m-1)(r_1+1)}-1}{9}\right]a$$

$$r\sum_{i=1}^{m}10^{\,i+1+i+1}=r\,(10^{\beta_1+r_1+2}+10^{\beta_1+3r_1+3}+\ldots$$

$$\ldots+(m-1)\,10^{\beta_1+(m-1)r_1+m})=r\,(1+2\,.\,10^{r_1+1}+$$

$$3\,.\,10^{2(r_1+1)}+.\,.\,.+(m-1)10^{(m-2)(r_1+1)})\,10^{\beta_1+r_1+2},$$

care după observarea dela pagina 105, „R. M, T", vol. IX, avem:

$$10^{\beta_1+r_1+2}\cdot r(1+2\cdot 10^{r_1+1}+..+(m-1)10^{(m-2)(1+1)}=r\left(\frac{m\,10^{(m-1)(r_1+1)}(10^{r_1+1}-1)-10^{m(r_1+1)}+1}{(10^{r_1+1}-1)^2}\right)10^{\beta_1+r_1+2}$$

$$m\,a+r\sum_{i=1}^{m-1} i=\frac{r\,m\,(m-1)}{2}+m\,a$$

deci avem:

$$S=10^{\beta_1+1}\,a\left[1+10^{2r_1+1}\,\frac{10^{(m-1)(r_1+1)}-1}{9}\right]+$$

$$r\left[\frac{m\,10^{(m-1)(r_1+1)}(10^{r_1+1}-1)-10^{m(r_1+1)}+1}{(10^{r_1+1}-1)^3}\right]\times$$

$$10^{\beta_1+r_1+1}+r\,\frac{m\,(m-1)}{2}+m\,a.$$

Dacă în această ultimă formulă facem:

$$a=r=1=\beta_1. \qquad r_1=0$$

Avem:

$$S=\frac{m\,(m+1)}{2}+\frac{100}{81}\,[1+10^m\,(9\,m-1)]$$

tocmai formula ce dă soluția problemei 819.

HARALAMB P. IONESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 6, Februarie 1930. *Joseph Neuberg* de † *V. Cristescu*. Sur l'orthopôle et sur des théorèmes de *Droz-Farny* et *Neuberg*, par *R. Georgmaghtigh*. Sur la droite de *Simson*, par *V. Thébault*. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „General *Sc. Panaitescu*", de *C. Malcoci*. *Gh. Zamfirescu*, Căpitan *I. Linteș*,

2. *V. Vâlcovici*. Généralisation du théorème des moments des quantités de mouvement. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences t. 189, p. 563, séance du 14 October 1929).

3. *V. Vâlcovici*. Généralisation du théorème de l'énergie. (Extrait des Comptes rendusdes séances de l'Académie des Sciences, t. 189, p. 679. séance du 28 Octobre 1929).

PROBLEME REZOLVATE

673. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\cos t+\cos 5\,t+\cos 9\,t=$$

$$2^8\prod_{k=0}^{4}\left[\cos t-\cos\frac{(2\,k+1)\,\pi}{10}\right]\prod_{k=1}^{2}\left(\cos t-\cos\frac{k\,\pi}{6}\right)\left[\cos t-\cos\frac{(k+3)\,\pi}{6}\right].$$

V. ALACI

Ținând seamă de formula care ne dă suma a două cosinusuri și de expresiunea cosinusului unui arc dublu în funcție de arcul simplu, putem scri succesiv:

$$(1)\ \cos t+\cos 5\,t+\cos 9\,t=\cos 5\,t+2\cos 5\,t\cos 4\,t$$

$$=\cos 5\,t\,(1+2\cos 4\,t)=\cos 5\,t\,(1+4\cos^2 2\,t-2)$$

$$=\cos 5\,t\,(2\cos 2\,t-1)(2\cos 2\,t+1)=$$

$$\cos 5\,t\,(4\cos^2 t-3)(4\cos^2 t-1)=$$

$$2^4\cos 5\,t\left(\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\left(\cos t-\frac{1}{2}\right)\left(\cos t+\frac{1}{2}\right)=$$

$$2^4\cos 5\,t\left(\cos t-\cos\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos t-\cos\frac{5\,\pi}{6}\right)\times$$

$$\left(\cos t-\cos\frac{2\,\pi}{6}\right)\left(\cos t-\cos\frac{4\,\pi}{6}\right)=$$

$$2^4\cos 5\,t\,.\prod_{k=1}^{2}\left(\cos t-\cos\frac{k\,\pi}{6}\right)\left(\cos t-\cos\frac{(k+3)}{6}\right)$$

Dacă avem în vedere și relația:

$$\cos n\,t=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left[\cos t-\cos\frac{(2\,k+1)\,\pi}{2\,n}\right]$$

(R. M. T., an. VII, No. 9).

unde luăm $n=5$, relația (1) se poate scri:

$$\cos t + \cos 5t + \cos 9t =$$

$$2^8 \prod_{k=0}^{4} \left[\cos t - \cos \frac{(2k+1)\pi}{10}\right] \prod_{k=1}^{2} \left(\cos t - \cos \frac{k\pi}{6}\right)\left(\cos t - \cos \frac{(k+3)\pi}{6}\right],$$

tocmai identitatea cerută.

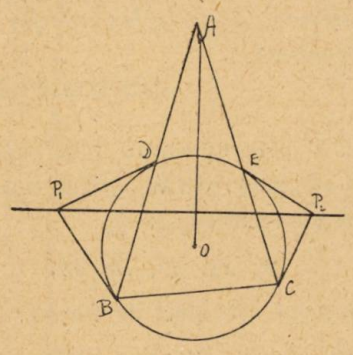
Observare. S'au primit soluții insuficiente dela trei corespondenți.

770. — *Se dă cercul* O *și un punct fix* A *în planul său. Fie* BC *o coardă de direcție dată a cercului* O, P_1 *polul lui* AB *și* P_2 *polul lui* AC *față de* O. *Să se demonstreze că dreapta* P_1P_2 *rămâne fixă ca direcție și poziție când coarda* BC *se deplasează paralel cu ea.*

COL. GH. BUICLIU

Soluție dată de d-nii: *Ionescu-Țiu D. C.* (Șc. Milit., de Geniu) și *Vâlceanu N. J.* (Șc. Polit., Timișoara).

Fie D și E punctele unde AB și AC întâlnesc a doua oară cercul O. Se știe că P_1 se află la întâlnirea tangentelor în B și D la O, iar P_2 la întâlnirea tangentelor în C și E la același cerc.



Dar atunci prin această construcție am obținut polara P_1P_2 a punctului fix A față de O. Se știe că această polară e perpendicuiară pe diametrul AO și cum A e fix, polara sa P_1P_2 este fixă.

Se vede că coarda BC poate fi oricum.

D-nii: *Hamerak C.* (Caransebeș) și *Vâlceanu N. J.* au dat foarte bnne soluțiuni analitice.

840. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(x - kr) + \sin x + \sum_{k=1}^{n} \sin(x + kr) = a.$$

C-TIN V. COSTACHESCU

Ecuația dată se poate scri succesiv:

$$\sin x + \sum_{k=1}^{n} [\sin(x - kr) + \sin(x + kr)] = a$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \sin x + 2 \sum_{k=1}^{n} \sin x \cos kr = a.$$

De aci deducem:

$$\sin x = \frac{a}{1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kr}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad x = \arcsin \frac{a}{1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kr}$$

Observare. Cum:

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos kr = \frac{1}{\sin \frac{r}{2}} \left(\sin \frac{r}{2} + 2 \sin \frac{r}{2} \cos r + 2 \sin \frac{r}{2} \cos 2r + \ldots + 2 \sin \frac{r}{2} \cos kr\right) =$$

$$\frac{1}{\sin \frac{r}{2}} \left[\sin \frac{r}{2} + \sin \frac{3r}{2} - \sin \frac{r}{2} + \sin \frac{5r}{2} - \sin \frac{3r}{2} - \ldots - \sin \frac{(2n+1)r}{2} - \sin \frac{(2n-1)r}{2}\right]$$

$$= \frac{\sin \frac{(2n+1)r}{2}}{\sin \frac{r}{2}},$$

rădăcina aflată mai sus se mai poate scri:

$$x = \arcsin \frac{a \sin \frac{r}{2}}{\sin \frac{(2n+1)r}{2}}.$$

Soluții date de d-nii: *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaurat, București), *Grossu I, Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Scarlat D.* (Șc. Navală, Constanța) și *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara).

850. — *Se cere patratul perfect de patru cifre, astfel ca numărul format de cifrele de rang nepereche să fie patrat perfect, iar cifrele de rang pereche să fie identice și egale cu suma cifrelor de rang nepereche.*

I. ILIUTA-DABULENI

Din enunț rezultă că numărul cerut este de forma $abcb$ și ac patrat perfect, unde $a \neq 0$.

Rezultă că ac poate fi unul din numerele:

(1) 16, 25, 36, 49, 64, 81,

b fiind terminație de patrat perfect și având încă:

$$b = a + c,$$

rezultă că pentru ac nu putem lua din șirul (1), decât numerele:

36 sau 81.

Numărul căutat ar putea fi:

3969 și 8919.

Dintre acestea numai 3969 este patrat perfect:

$$3969 = 63^2,$$

deci formează singura soluție a problemei.

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Băcanu Ioan* (Sublocot., Sibiu), *Bidhianu I. Adrian* (lic. Oltenița), *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Bujoreanu Vicențiu* (lic. Șincai, București), *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Codreș I. Florea* (lic. Milit., Craiova), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Dăscălescu St. Hristache* (Șc. Polit., București), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Național, Iași), *Dimitriu At, Ioan* (Șc. Polit., București), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Grecu M. Cristoche* (Oltenița), *Lucian I. David* (Șc. Polit., Timișoara), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emil* (Șc. Polit., București), *Mihălceanu N. Nicolae* (lic. Constanța), *Millea G. Ene*, *Motoc D. M.* (lic. Oltenița), *Negrea A. Mircea* (student, București), *Patron Mihai* (lic. Milit., Iași), *Petrescu I.*, *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Popescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Purdilă Anton* (lic. Brașov), *Raciu Gh. Raicef* (lic. Silistra), *Scarlat D.* (Șc. Navală, Constanța), *Șerban-Utmeni* (lic. Oltenița), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iași), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara) și *Ungheanu Mihail* (lic. Oltenița).

A mai trimes soluție d-l: *Costăchescu C-tin* (lic. Mil., Iași).

854. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{2(x+1)(x+2)(x+3)}{x+3-4(x-1)+5(x-2)+3(x+1)} = 21.$$

ION C. VONICA

Simplificând numitorul, putem scri:

$$\frac{2(x+1)(x+2)(x+3)}{5x} = 21$$

$$2x^3 + 12x^2 - 83x + 12 = 0.$$

Observând că primul membru se anulează pentru $x = 4$, putem scri încă ultima ecuație:

$$(x-4)(2x^2 + 20x - 3) = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuații sunt:

$$x_1 = 4, \quad x_{2,3} = \frac{-10 \pm \sqrt{106}}{2} = -5 \pm \sqrt{26,5}.$$

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Barbu A. Drinceanu* (absolvent, Mehedinți), *Băcanu Ioan* (Sublocot., Sibiu), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Chiriță Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Cuciureanu St.* (lic. Milit., Iași), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ioniță Vasile* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Iotta D. Mihail* (Șc. Polit., Timișoara), *Lucian I. David* (Șc. Polit., Timișoara), *Mara Ștefan* (Pecica), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emil* (Șc. Polit. Polit., București), *Mihăileanu Nicolae* (lic. Constanța), *Milea G. Ene*, *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenița), *Oelze Emil* (Șc. Timișoara), *Patron Mihai* (lic. Milit., Iași), *Petrescu Traian* (lic. Milit., Iași), *Piperescu Mircea* (lic. Timișoara), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Popescu O. Ion* (absolvent Calafat), *Pupezescu Gh. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Scarlat D.* (Șc. Navală, Constanța), *Știopu Porfir* (Caransebeș). *Teodorescu Stavraehc* (lic. Milit., Iași) și *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara).

A mai trimes soluție -dl: *Costăchescu C-tin* (lic. Milit. Iași),

857. — *Se cere patratul de patru cifre așa ca numărul format de primele două cifre și cel format de ultimele două cifre să fie numere cu cifre consecutive.*

GEORGE P. BOERESCU

Fie $abcd$ patratul cerut. Din terminațiile de două cifre ale unui patrat perfect, acelea în care cifrele sunt consecutive, sunt:

01, 21, 56, 76, 89,

Patratul cerut este deci de forma:

$ab01$, $ab21$, $ab56$, $ab76$, $ab89$.

Rădăcina patrată a acestor numere poate fi de forma:

$z1$, $z9$, $z4$, $z6$, $z3$, $z7$, unde $z \geqq 3$.

1°. Avem:

$$z1^2 = (10z+1)^2 = 100z^2 + 20z + 1.$$

Pentruca ultimele două cifre ale patratului să să fie 01 sau 21, trebue ca $z = 5$ sau $z = 6$, în care caz avem:

$$51^2 = 2601, \quad 61^2 = 3721,$$

patrate care nu satisfac enunțul.

2°. Avem:

$$z\,9^2 = 100\,z^2 + 180\,z + 81.$$

Pentruca ultimele două cifre să fie 01 sau 21, trebue ca: $z = 4$, $z = 9$ sau $z = 3$, $z = 8$, în care caz avem:

$49^2 = 2401$, $99^2 = 9801$, $39^2 = 1521$, $89^2 = 7921$.

Dintre aceste patrate, numai 9801, satisface enunțul având și primele două cifre consecutive.

3°. Avem:

$$z\,4^2 = 100\,z^2 + 80\,z + 16.$$

Pentruca ultimele două cifre să fie 56 sau 76, trebue ca $z = 3$, $z = 8$ sau $z = 7$, în care caz avem:

$$34^2 = 1156,\quad 84^2 = 7056,\quad 74^2 = 5476.$$

Dintre aceste patrate numai 5476 satisface enunțul.

4°. Avem:

$$z\,6^2 = 100\,z^2 + 120\,z + 36.$$

Pentruca ultimele două cifre să fie 56 sau 76 trebue ca $z = 6$ sau $z = 7$, în care caz avem:

$$66^2 = 4356,\quad 76^2 = 5776.$$

Dintre aceste patrate numai 4356 satisface enunțul.

5°. Avem:

$$z\,3^2 = 100\,z^2 + 60\,z + 9,$$

Pentruca ultimele două cifre să fie 89, trebue ca $z = 3$, $z = 8$, în care caz avem:

$$33^2 = 1089,\quad 83^2 = 6889.$$

Dintre aceste patrate numai 1089 satisface enunțul.

6°. Avem:

$$z\,7^2 = 100\,z^2 + 140\,z + 49.$$

Pentruca ultimele două cifre să fie 89, trebue ca $z = 6$, în care caz avem:

$$67^2 = 4489,$$

care nu satisface enunțul.

Singurele soluții ale problemei, sunt deci:

$1089 = 33^2$, $4356 = 66^2$. $5476 = 74^2$, $9801 = 99^2$.

Au dat toate soluțiile, d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit. Iași), *Costache N.* (lic. Oltenița), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenița), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Marineanu Traian* (student, București), *Nichiforescu Gh.* (student) și *Patron Mihail* (lic. Milit., Iași).

Au găsit, numai trei soluții, d-nii: *Costăchescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), *Mereuță Emil* (Șc. Polit., București), *Motoc D. M.* (lic. Oltenița), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Pupezescu Gh. Ioan* (Șc. Polit., București), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chișinău) și *Ungheanu Mihail* (lic. Oltenița).

Au găsit numai două soluții, d-nii: *Popescu V. Mircea* (lic. Timișoara) și *Tutoveanu Valeriu* (Șc. Polit., București).

Au găsit numai o soluție, d-nii: *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Național, Iași) și *Mihăilescu N. Nicolae.*

N'au găsit nici o soluție, d-nii: *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina) și *Lucian I. David* (Șc. Polit., Timișoara),

866. — *Se cere patratul perfect de șase cifre în care prima cifră este egală cu a treia; a cincea cifră este egală cu a șasea; în fine cifra a doua este rădăcina cubică a numărului format din cifrele întâia, a patra și a doua.*

EMIL MEREUTA

Conform enunțului patratul cerut este de forma $a\,b\,a\,c\,d\,d$, unde:

$$b^3 = a\,c\,d. \tag{1}$$

Din terminațiile de două cifre ale unui patrat perfect, acelea în care cifrele sunt egale, sunt:

$$00,\quad 44,$$

deci $d = 0$ sau $d = 4$.

Numărul cerut nu poate fi decât de forma:

$$a\,b\,a\,c\,00,\quad a\,b\,a\,c\,44.$$

Din (1), deducem că, $b = 5$, 6, 9 ale căror cuburi sunt:

$$125,\ 216,\ 729.$$

Acestea sunt numerile corespunzătoare pentru $a\,c\,b$. Patratul cerut, observând care este a, b, c, rezultă că se găsește printre numerile:

151200	151244
262100	262144
797200	797244.

Numerile $151200 = 1512 \times 10^2$, $797200 = 7972 \times 10^2$ nu's patrate perfecte, căci 12 și 72 nu's terminații de patrate perfecte; apoi ultimul număr

nu-i patrat perfect fiind divizibil cu 3 fără a fi cu 9. Dintre celelalte trei numere rămase, găsim că numai 262144 este patrat perfect:

$$262144 = 512^2.$$

Acest patrat este singura soluție a problemei.

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Antonescu Aurel* (Șc. Polit., București), *Bâcicov C.* (bacalaureat, Tighina), *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Bugeanu C.* (lic. Timișoara), *Bujoreanu Vicențiu* (lic. Șincai, București), *Crivăț Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Cuciureanu Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Dăscălescu St. Hristache* (Șc. Polit., București), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Național, Iași), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Crecu M. Cristache* (lic. Oltenița), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit, Iași), *Ionescu Aurel* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Lucian I. David* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupescu C-tin, Marcu Aureliu* (Șc. Polit, Timișoara), *Marsieu Teodor* (Șc. Polit.,, Timișoara), *Milea G. Ene, Motoc D. M.* (lic. Oltenița), *Mihăileanu Nicolae* (lic Constanța), *Nagler Mayer* (lic. Național, Iași), *Necu I. Ilie* (lic. Cantemir, București), *Negoescu A. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Negrea A. Mircea* (student, București), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Patron Mihai* (lic. Milit., Iași), *Pop Leontin* (lic. Oradea), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă Anton* (lic. Brașov), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chișinău), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit. Iași), *Tutoveanu Valeriu* (Șc. Polit, București), *Ungheanu I. Mihai* (lic. Oltenița), *Vasiliu I., Velicescu G. Titu* (lic. Matei-Basarab, București) și *Zamfir D-tru* (lic. Buzești, Craiova).

Au mai trimes soluție, d-nii: *Costăchescu C-tin* (lic. Milit., Iași) și *Grossu I. Aurel* (lic Carol, Craiova).

PROBLEME PROPUSE

887. — Se cer patratele perfecte de forma $a\,b\,b\,c\,b\,d$ în care $c\,d$ este un patrat perfect, iar c este suma cifrelor identice.

LUCIAN I. DAVID.

888. — Să se calculeze suma:

$$S = 12 + 213 + 3114 + 41115 + \ldots + n\,11\ldots1\,m,$$

unde $m = n + 1$, ultimul număr având cifra 1 de $n - 1$,

CRISTACHE M GRECU.

889. — Din fiecare punct M al unei drepte Δ se duc tangentele M A și M B la un cerc cu centrul în O. Razele O A și O B întâlnesc aceste tangente în D și E. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului D E.

COL. GH. BUICLIU

890. — Fie A_1, B_1, C_1, picioarele înălțimelor triunghiului A B C, iar M punctul lor de intersecție. Se prelungește C_1C cu o cantitate $CD = C_1M$. Să se arate că:

1°. $$\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BM}\cdot\overline{BC_1}}{\overline{C_1D}\cdot\overline{C_1C}\cdot\overline{C_1M}} = 1$$

2°. $$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{BC_1}^2.$$

ION MARGINEANU

891. — Să se elimine x, y, z, între relațiile:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\sqrt[4]{\dfrac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\sqrt[4]{\dfrac{x-y}{x+y}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}\sqrt[4]{\dfrac{y+z}{y-z}} + \sqrt{\dfrac{b+c}{b-c}}\sqrt[4]{\dfrac{y-z}{y+z}} = 2 \\ \sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}}\sqrt[4]{\dfrac{z+x}{z-x}} + \sqrt{\dfrac{c+a}{c-a}}\sqrt[4]{\dfrac{z-x}{z+x}} = 2. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

892. — Să se rezolve ecuația:

$$(a - 2x - 2\sqrt{x^2 - ax - b^2})^n - (a + 2bi)^n = 0,$$

unde $i = \sqrt{-1}$.

V. ALACI

893. — Să se stabilească relația:

$$\sum \frac{(h_b'' + h_c'')(h_a + h_a'')}{h_a' + h_a''} = 2(h_a'' + h_b'' + h_c'').$$

h_a, h_b, h_c, fiind înălțimele unui triunghiu oarecare, h_a', h_b', h_c' segmentele din aceste înălțimi cuprinse între vârfuri și ortocentru și h_a'', h_b'', h_c'', segmentele cuprinse între ortocentru și baze.

JUSTIN N. VALCEANU

894, — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sin x + \operatorname{cosec} x}{\sin^3 x + \operatorname{cosec}^3 x} + \frac{\cos x + \sec x}{\cos^3 x + \sec^3 x} - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x} = 1.$$

NICOLAE PAVEL

INFORMAȚIUNI

Dragutin Ciupe (director). Probleme rezolvate din aritmetică și algebră (Metoda cea mai lesnicioasă pentru a învăța în scurt timp „Regula de trei simplă și compusă, fără profesor). Prețul 20 lei plus porto; a se adresa autorului: Str. Ungurească No. 30, Bistrița, Jud. Năsăud.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului la „R. M. T." pentru a nu fi siliți a întrerupe trimiterea revistei.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

CARTEA ROMÂNEASCĂ

Sucursala Timişoara

ANUL X. 15 APRILIE 1930 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. COL. GH. BUICLIU. UN CAZ DE REZOLVARE A ECUATIEI DE GRADAL AL PATRULEA.
2. NOTE MATEMATICE, 6, 7.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 780, 827, 843, 852, 855, 856, 865.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească“

Avem plăcerea să anunţăm că mai face parte din Comitetul Revistei şi d-l **Ernest Csilcser,** profesor la liceul Diaconovici-Loga, Timişoara.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

UN CAZ DE REZOLVARE A ECUAȚIEI DE GRADUL AL PATRULEA

de COL. GH BUICLIU

Având a descompune un polinom numeric de gradul al patrulea în o sumă de două patrate am ajuns la rezultatul:

(1) $$f(x) = (x^2 - 1)^2 + 4x^2$$

și atunci mi-am pus întrebarea dacă în general polinomul:

(2) $$F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

nu se poate descompune și când anume se poate descompune în o sumă de două patrate de forma în care s'a descompus polinomul (1).

Rezultatul este foarte simplu și conduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al patrulea, în anumite cazuri. Simplicitatea acestui rezultat mă face să bănuesc că el ar fi cunoscut deja. Il dau totuși la îndemâna corespondenților noștri pentru a-l utiliza și pentrucă metoda ce întrebuințez poate fi bogată în consecințe.

Prin analogie cu exemplul numeric (1), am pus:

(3) $$F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + \delta^2 x^2.$$

Identificând coeficienții din (2) cu aceia din (3) se găsește un sistem de ecuații ușor de rezolvat, ale cărei soluții sunt:

(4) $$\alpha = 1; \quad \beta = \frac{a}{2}; \quad \gamma = \frac{c}{a}$$

(5) $$\delta^2 = b - \frac{2c}{a} - \frac{a^2}{4}$$

cu condiția:

(6) $$d = \frac{c^2}{a^2}.$$

Va să zică răspunsul la întrebarea pe care mi-am pus-o este: Dacă între coeficienții polinomului (2) există condiția (6) sau, ceiace este tot una:

(7) $$a^2 d - c^2 = 0$$

și dacă:

(8) $$b - \frac{2c}{a} - \frac{a^2}{4} > 0,$$

atunci $F(x)$ se descompune ca în (3).

Dacă însă:

(9) $$b - \frac{2c}{a} - \frac{a^2}{4} < 0,$$

atunci δ^2 este imaginar.

In condițiile (7) și (8) avem deci:

(10) $$F(x) = \left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{2c}{a} - \frac{a^2}{4}\right)x^2,$$

Această descompunere sugerează imediat rezolvarea ecuației:

$$F(x) = 0,$$

când între coeficienții ei avem relația (8).

In adevăr ținând seamă de (10) și identitatea:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

ecuația se poate scrie:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a} - b\right)x^2 = 0$$

$$\left[x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} + x\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a} - b}\right]\left[x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{c}{a} - x\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a} - b}\right] = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt date de ecuațiile de gradul al doilea:

$$x^2 + \left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{2c}{a} - b}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

şi:

$$x^2+\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2c}{a}-b}\right)x+\frac{c}{a}=0.$$

In cazul neegalităţii (8) aceste ecuaţii au coeficienţii reali, iar în cazul neegalităţii (9) ele au şi coeficienţi imaginari.

Şi într'un caz şi altul, se vede că dacă:

$$a^2d-c^2=0$$

rezolvarea ecuaţiei de gradul al patrulea se reduce la rezolvarea a două ecuaţiuni de gradul al doilea.

NOTE MATEMATICE

6. *Asupra unei note.*

In nota din „*Gazeta Matematică*, anul XXIX, pag. 411, se calculează suma:

$$S_1=m+mn+mnn+\ldots$$

unde m şi n sunt cifre.

In cele ce urmează îmi propun a calcula şirul:

$$S_2=m_1+m_2n+m_3nn+\ldots+m_t\overbrace{n\ldots n}^{t-1}$$

ştiind că:

$$m_1,\ m_2,\ldots m_t,$$

sunt termenii unei progresiuni aritmetice cu raţia r, iar:

$m_1=10^k$ şi n are v cifre,

Vom avea:

$$s_2=10^k+(10^k+r)n+(10^k+2r)nn+\ldots$$
$$\ldots+[10^k+(t-1)r]\overbrace{nn\,n\ldots n}^{t-1}$$

sau:

$$S_2=10^k+(10^k+r)10^v+(10^k+2r)10^{2v}+\ldots$$
$$\ldots+(10^k+(t-1)r)10^{(t-1)v}+n[1+(1+10^v)+$$
$$(1+10^v+10^{2v})+\ldots]$$

sau:

$$S_2=10^k+10^{k+v}+10^{k+2v}+\ldots+10^{k+(t-1)v}+$$
$$10^vr[1+2.10^v+\ldots+(t-1)10^{(t-2)v}]+$$
$$n[1+(1+10^v)+\ldots]$$

Insă avem:

$$(1)\quad 10^k+10^{k+v}+\ldots+10^{k+(t-1)v}=10^k\frac{10^{tv}-1}{10^v-1}$$

$$(2)\quad 10^vr[1+2.10^v+\ldots+(t-1)10^{(t-1)v}]=$$
$$10^vr\frac{(t-1)10^{(t-1)v}}{10^v-1}-\frac{10^{(t-1)v}-1}{(10^v-1)^2}$$

$$(3)\quad n[1+(1+10^v)+(1+10^v+10^{2v}]+\ldots]$$
$$=n\left[10^v\frac{10^{(t-1)v}-1}{(10^v-1)^2}-\frac{t-1}{10^v-1}\right].$$

Adunând (1), (2), (3) a em:

$$S_2=10^k\frac{10^{tv}-1}{10^v-1}+10^vr\left[\frac{(t-1)10^{(t-1)v}}{10^v-1}-\right.$$
$$\left.\frac{10^{(t-1)v}-1}{(10^v-1)^2}\right]+n\left[10^v\frac{10^{(t-1)v}-1}{(10^v-1)^2}-\frac{t-1}{10^v-1}\right]$$

In această formulă dacă facem:

$$k=r=v=1,\quad t=3,\quad n=9.$$

avem:

$$10+119+1299=1428.$$

Făcând numai: $r=1$, $r=0$, şi înlocuind pe 10^k cu m,

avem:

$$S_2=m\frac{10^t-1}{9}+n\left[10\frac{10^{t-1}-1}{9^2}-\frac{t-1}{9}\right]$$

tocmai formula din nota sus citată.

HARALAMB P. IONESCU
(lic. Oltenita).

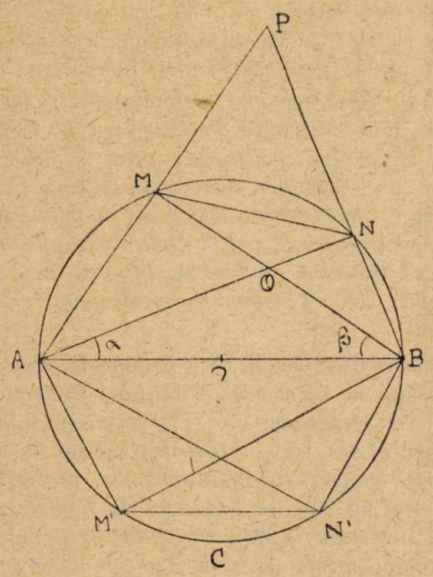
7 *Asupra unor chestiuni.*

Nota aceasta are de scop să extindă şi să generalizeze problema 669, rezolvată în R. M. T., vol. VIII, No. 2, pag. 26, nota matematică No. 24 din acelaş volum, No. 10, pag. 151 şi chestiunea de geometrie plană propusă la examenul de admitere în anul I al Şcoalei politechnice din Bucureşti în Noembrie 1923, rezolvată de către d-l *Ernest Abason* în „Chestiuni de examen".

Să considerăm problema:

In semicercul descris pe AB *ca diametru se consideră o coardă variabilă* MN, *care întinde un arc constant de n grade. Fie* P *şi* Q *punctele* (AM×BN), (AN×BM).

1°. *Să se calculeze unghiurile* A P B *și* A Q B. *Să se deducă că patrulaterul* P M Q N *e inscriptibil.*



2°. *Să se găsească locurile geometrice ale punctelor* P *și* Q.

3°. *Se consideră coarda* M N *paralelă cu* A B. *Să se calculeze, în funcție de acest diametru, segmentele* A M, A N, B N *și* B M.

4°. *Să se determine poziția coardei* M N, *astfel ca raportul laturilor opuse ale patrulaterului* A M N B *să fie acelaș.*

1°. Avem:

$$\sphericalangle A P B = \text{măs}\,\frac{\text{arc}\,ACB - \text{arc}\,MN}{2} = \frac{1}{2}(180^0 - n^0)$$

$$\sphericalangle A Q B = \text{măs}\,\frac{\text{arc}\,ACB + \text{arc}\,MN}{2} = \frac{1}{2}(180^0 + n^0)$$

și, de oarece:

$$\sphericalangle A Q B = \sphericalangle M Q N,$$

ca opuse la vârfuri,

$$\sphericalangle A P B + \sphericalangle M Q N = \frac{1}{2}(180^0 + n^0 + 180^0 - n^0) = 180^0,$$

ceiace arată că patrulaterul P M Q N e inscriptibil.

2°. Unghiurile A P B și A Q B fiind constante, locurile geometrice ale punctelor P și Q sunt două arce de cerc descrise pe coarda A B și capabile respectiv, de $\frac{1}{2}(180^0 - n^0)$ și $\frac{1}{2}(180^0 + n^0)$.

3°. Figura A M' N' B fiind un trapez isoscel, avem: A M = B N' și A N' = B M'.

Din triunghiurile dreptunghice A M' B și A N' B obținem:

$$A M' = A B \sin\frac{180^0 - n^0}{4}$$

$$A N' = A B \cos\frac{180^0 - n^0}{4}.$$

Dar:

$$\sin\frac{180^0 - n^0}{4} = \sin\frac{1}{2}\left(90^0 - \frac{n^0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(90^0 - \frac{n^0}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin\frac{n^0}{2}}{2}};$$

$$\cos\frac{180^0 - n^0}{4} = \cos\frac{1}{2}\left(90^0 - \frac{n^0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(90^0 - \frac{n^0}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sin\frac{n^0}{2}}{2}}.$$

Deci:

$$A M' = A B\sqrt{\frac{1 - \sin\frac{n^0}{2}}{2}},\quad A N' = A B\sqrt{\frac{1 + \sin\frac{n^0}{2}}{2}}$$

4°. Să considerăm punctul M în A. Din triunghiul A N B obținem:

$$\frac{A B}{M N} = \frac{1}{\sin\frac{n^0}{2}}.$$

Avem însă:

$$A M = A B \sin\beta,\quad B N = A B \sin\alpha,$$

deci:

$$\frac{A M}{B N} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{A B}{M N} = \frac{1}{\sin\frac{n^0}{2}}.$$

Dar:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{Q A}{Q B} = \frac{1}{\sin\frac{n^0}{2}}.$$

Prin urmare, punctul Q se află la intersecția cercului descris pe coarda A B și capabil de un-

ghiul $\frac{1}{2}(180^0+n^0)$ cu cercul, loc al punctelor Q, astfel ca:

$$\frac{QA}{QB}=\frac{1}{\sin\frac{n^0}{2}}.$$

Se obţin astfel două patrulatere AMNB, simetrice în raport cu diametrul perpendicular pe AB.

I. MURAROIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 7, Martie 1930. Sur les triangles orthologiques, par + *N. Agronomof*. Rectificarea şi complectarea soluţiei problemei 3202, de *Col. Gh. Buicliu*, Concursul „Gazetei Matematice", de *G. Ţiţeica*.

2. *Mathematica*, vol. I. 1929, apare la Cluj, având următorul Comitet de conducere:

Directori: *G. Ţiţeica* (Bucureşti) şi *D. Pompeiu* (Bucureşti). Redactori: *N. Abramescu* (Cluj) *A. Angelescu* (Cluj). *Th. Angheluţă* (Cluj), *G. Bratu* (Cluj), *A. Davidoglu* (Bucureşti), *D. V. Ionescu* (Cluj), *O. Onicescu* (Bucureşti), *C. Popovici* (Iaşi), *S. Sanielevici* (Iaşi), *S. Stoilov* (Cernăuţi), *V. Vâlcovici* (Timişoara). Secretarul de redacţie: *Petre Sergescu* (Cluj).

Cuprinde: Sur les familles de fonctions analytiques dont aucune fonction limites n'est constante, par *Paul Montel*, professeur à la Faculté des Sciences de Paris. Sur certains mouvements plans stationnaires des liquides visqueux incompressibles, par *Alfred Rosenblatt*, professeur à l'Université de Cracovie. Un théorème sur les limites des suites numériques, par *M. Biernacki*, à Paris. Sur les images continues et biunivoques de l'ensemble de tous les nombres irrationnels, par *W. Sierpinski*, professeur à l'Université de Varsovie. Sur une extension de la notion de probabilité, par *Al. Proca*, Docteur es sciences, à Paris. Sur les polygônes autoprojectifs, par *Gr. C. Moisil*, à Bucarest. Sur les fonctions monogènes arèolairement, par *G. Călugăreanu*, docteur es sciences. Sur les lignes qui sont les ensembles des points où une fonction harmonique prend la valeur zéro, par *J. Soula*, professeur à l'Université de Montpellier. Sur la représentation directe des opérations du calcul tensoriel, par *V. Lalan*, professeur à l'Institut Catholique de Paris. Sur la transformation d'une équation différentielle en équation aux différences, par *D. Pompeiu*, professeur à l'Université de Bucarest. Sur la moyenne arithmétique des coéfficents d'une série de *Taylor*, par *Dr. J. Karamata*, Beograd. Sur une formule de *M. Pompeiu*, par *A. Angelesco*, professeur à l'Université de Cluj. Sur le théorème de *Sturm*, par *Miron Nicolesco*, maître de conférences à l'Université de Cernautzi. Sur un ensemble non dénombrable qui est transformé en un ensemble de mesure nulle par toute fonction de *Baire*, par *W. Sierpinski*, professeur à l'Université de Varsovie. Sur le potential correspondant à une attraction proportionnelle à $\rho\, e^{\frac{\rho^2}{2}}$. Sur la dérivation de l'intégral indéfinie de *M. Perron*, par *S. Saks*, à Varsovie, Pologne. Remarque sur un théorème de *M. Carlman*, par *M. Biernacki*, à Vilno. Remarque sur les fonctions holomorphes et les fonctions continues d'une variable complexe, par *D. Pompeiu*, professeur à l'Université de Bucarest. Sur la meilleure approximation des fonctions analytiques el leurs points singuliers, par *S. Mandelbrojt*, Université de Lille. Sur les zéros de cestains polynomes, par *O. Onicescu*, professeur à l'Université de Bucarest. Sur les algebroïdes liées algébriquement, par *Th. Varopoulos*, professeur à l'Université d'Athènes.

3. *Mathematica*, vol. II. 1929. Inchinat în semn de omagiu, profesorului *D. Emmanuel*. Cuprinde: Prefaţă, de *N. Coculescu*. Un professeur, par *G. Ţiţeica*. Sur les courbes de convergence des séries procédant suivant les inverses de polynomes donnés, par *N. Abramescu*, professeur à l'Université de Cluj. Sur les intégrales de *Laplace*, par *A. Angelescu*, professeur à l'Université de Cluj. Sur une classe de développements en série d'une fonction holomorphe, par *Th. Angheluţă*, professeur à l'Université de Cluj. Monogénéité et holomorphie, par *D. Pompeiu*, professeur à l'Université de Bucarest. Formules de *Lelieuvre* dans le cas d'une surface à courbure négative, rapportée à ces lignes isothermes conjugées, par *Dan I. Hulubei*, maître de conférences à l'Université de Cernăuţi. Un probléme relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, par *D. V. Ionesco*, maître de conférences à l'Université de Cluj. Sur les fonctions entieres ayant un ensemble donné de droites de *M. Julia*, par *M-me Vera Myller-Lébédeff*, professeur à l'Université de Iassy. Reţelele lui Cebîşev şi paralelismul lui *Levi-Civita*, privire generală asupra chestiunei de *A. Myller*, profesor la Universitatea din Iaşi. Sur quelques systèmes aux dérivées partielles, par *Miron Nicolesco*, maître de conférences à l'Université de Cernautzi. Couples de transformations et transcendantes uniformes corrélatives, par *O. Onicescu*, à Bucarest. Sur le théorèmes des accroissements finis, par *D. Pompeiu*, professeur à l'Université de Bucarest. Sur les produits différentiels infinis et leur application à l'astronomie, par *C. Popovici*, professeur à l'Université de Jassy. Sur une propriété cyclique des nombres entiers, par *S. Sanielevici*, professeur à l'Université de Jassy. Sur les valeurs singulières des transformations continues de plusieurs variables, par *S. Stoilov*, professeur à l'Université de Cernăuţi. Sur les calcul avec les alephs, par *G. Sudan*, docteur es sciences, à Bucarest. Sur le genre de vecteurs électro-magnétiques, par *Victor Valcovici*, recteur de l'École polytechnique de Timişoara. Réseaux de *Tschebycheff* isométriques par rapport à une famille de géodésiques, par *D. Hulubei*, maître de conférences à l'Université de Cernăuţi. Sur les séries des puissances périodiques, par *E. Abason*, maître

de conférences à l'École polytechnique de Bucarest. Sur une classe d'équations algébriques aux racines trigonométriques, par *V. Alaci*, professeur à l'École polytechnique de Timişoara. Ein rekursionstheorem über die vielecke, von Dr. *D. Barbilian*, in Bukarest. Sur une classe de polynômes attachée à une fonction intégrable, par *Nicolas Ciorănescu*, docteur es sciences, à Paris. Un întelept, de profesor *E. A. Pangrati*, fost rector al Universităţiei din Bucureşti. Sur les modules des racines des équations algébriques par *P. Sergescu*, professeur à l'Université de Cluj. Familles de variétés Riemaniennes, par *G. Vrânceanu*, maître de conférences à l'Université de Jassy. Activitatea D-lui *D. Emmanuel* în învăţământul technic superior de *Ion Ionescu*, inginer inspector general, fost profesor la Şcoala Naţională de Poduri şi Şosele. Profesor la şcoala polytechnică din Bucureşti.

4. *Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées de l'École polytechnique de Bucarest*, 1-ère Année, No. 2, 1930. Sur le théorème des accroissements finis par *M. Ernest Abason*. Les cas d'exception de certaines propriétés quadratiques, par *M. D. Barbilian*. (suite). Sur la similitude et ses lois. Généralisation. Applications en géométrie; par *M. D. Germani*. Sur la stabilité du mouvement d'une système continu, par *Gr. C. Moisil*. Sur une forme spécial du principe générale de la dynamique, par *O. Onicesco*. Observations sur une note: Les mouvements fluides engendrés par la rotation de certains solides, de *M. V. Vâlcovici*, par *M. Elie Carafoli*. Vena contracta par *M. D. Pavel*. Sur les efforts de glissement dans une poutre en béton armé à section variable, par *M. M. Hangan*. Cadres à gradins, par *M. Cristea Mateesco*. Mesure d'une coefficient de seflinduction, par *M. I. Constantinesco*. Sur le rôle physique des puissances instantanées, par *M. C. Budeanu*.

5. *Revista Matematică Universitară*. redactată de *Rodolphe Raclis* pentru candidaţii la licenţă şi elevii şcoalelor technice superioare, I(4). Inchinat în întregime în memoria lui *Traian Lalescu* 1882 — 1929. Cuprinde: Scrisori către d-l *Raclis* din partea savanţilor *E. Picard* şi *Vito Voltera*, prin care se glorifică strălucita activitate matematică a lui *Traian Lalescu*. Cuvântările d-lui *E. Pangrati* şi preot *N. Văleanu*, prin care se arată perderea ireparabilă pentru ştiinţă, societate şi familie a acelui a cărui minte de geniu a strălucit puternic înălţând un Neam şi o Ţară, a lui *Traian Lalescu*.

Câteva cuvinte despre *Lalescu* de *G. Ţiţeica*. Cercetările de algebră cele din urmă, ale lui *Lalescu*, de *D. Pompeiu*. Activitatea lui *Traian Lalescu* la „Gazeta Matematică", de *Ion Ionescu*. Ad perpetuam rei memorian de *V. Vâlcovici*. Programul cursului de Algebră superioară şi elemente de Analiză, profesat la facultatea de ştiinţe din Bucureşti în anul şcolar 1927 — 1928, de *Traian Lalescu* şi *Rodolphe Raclis*. Memoriu asupra lucrărilor mele ştiinţifice şi asupra carierii nniversitare până la 1 Aprilie 1912. *(Traian Lalescu)*.

Fondul *Traian Lalescu*, instituit de Revista Universitară Matematică, la care d-l *Rodolphe Raclis* a subscris 100.000 lei. Testamentul lui *Traian Lalescu*, de *Rodolphe Raclis*.

6. *V. Vâlcovici. Sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de certains solides.* (Extrait du „Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timişoara, Tome 3, fasc. 1—2.)

7. *V. Alaci. Une classe de fonctions discontinues de première espèce.* (Extrait du „Bulletin scientifique de l'École polytechnique de Timişoara, Tome 3, fasc. 1—2.)

PROBLEME REZOLVATE

780. — *Să se găsească un patrat sau cub perfect de 4 cifre, a cărui rădăcină patrată sau cubică să fie un număr format din două din cifrele patratului sau cubului.*

COL. GH. BUICLIU

Pentru cazul patratelor, problema aceasta a fost propusă şi de d-l *N. Botea* în *Gazeta Matematică*, sub No. 3181, rezolvată la pag. 72, vol. XXX al aeelei reviste.

Sau găsit acolo soluţiile:

$50^2 = 2500$; $60^2 = 3600$; $63^2 = 3969$; $64^2 = 4096$

$74^2 = 5476$; $76^2 = 5776$; $95^2 = 9025$; $96^2 = 9216$.

La soluţia problemei 3181 din *Gazeta Matematică* s'a făcut şi unele observări, între care şi aceia că pentru cuburi avem soluţiile:

$10^3 = 1000$, $11^3 = 1331$, $12^3 = 1728$, $21^3 = 9261$.

Observaţiuni. 1°. Originea problemei 780 este în problema 3392 pe care am propus-o în *Gazeta Matematică*, vol. XXXI, pag 279, cu următorul enunţ:

Să se găsească un patrat perfect de 4 cifre, ştiind că dacă se schimbă între ele ultimele 2 cifre, se obţine un cub perfect.

La soluţia dată la pagina 473 acelaşi volum s'a găsit:

$$96^2 = 9216 \quad \text{şi} \quad 21^3 = 9261,$$

care e şi una din soluţiile problemei 780 de azi.

2°. Au găsit toate soluţiile, fără a se folosi de rezultatele date în *Gazeta Matematică*, d-nii: *Carp I. Ig.* (Chişinău), *Dimitruiu A. I.* (absolvent, liceul Galaţi), *Ionescu P. H.* (Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C.* (Şc. Milit. de Geniu), *Marineanu Tr.*, *Mihalcea E.* (studenţi, Bucureşti) şi *Popa Gh. I.* (lic. Oltenita).

3°. D-l *Ghişoiu I. P.* (Bucureşti) a folosit datele din *Gazeta Matematică*, ceiace găsim natural la un foarte harnic coresoondent al acelei reviste,

D-sa a căutat şi a găsit pătratele şi cuburile de 5 cifre ale căror rădăcini de 2 cifre se scriu cu cifre de ale patratului sau cubului, patratele de 5 şi 6 cifre ale căror rădăcini de 3 cifre se scriu cu cifre de ale patratului.

827. — *Să se găsească patratele perfecte de forma:*

$$a\,b\,c\,c\,c\,d, \quad b\,d\,c\,c\,c\,a,$$

ştiind că:

$$d - a = 2\,c.$$

H. P. IONESCU.

Fie:

$$M = a\,b\,c\,c\,c\,d, \quad N = b\,d\,c\,c\,c\,a.$$

Cifrele a şi d fiind terminaţii de patrate perfecte pot avea numai valori din şirul:

(1) 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Pe de altă parte relaţia de condiţie:

(2) $$d - a = 2\,c,$$

arată că cifrele a şi d sunt de aceiaşi paritate. Asociind deci în toate felurile posibile cifrele şirului (1) aşa încât ele să fie de aceiaşi paritate şi ţinând seamă că (2) rezultă:

$$d \geqq a,$$

se formează astfel următoarele 6 tablouri:

$T_1 \equiv$

a	1	1	1
c	0	2	4
d	1	5	9
M	$1\,b\,0001$	$1\,b\,2225$	$1\,b\,4449$
N	$b\,10001$	$b\,52221$	$b\,94441$

$T_2 \equiv$

a	4	4
c	0	1
d	4	6
M	$4\,b\,0004$	$4\,b\,1116$
N	$b\,40004$	$b\,61114$

$T_5 \equiv$

a	5	5
c	0	4
d	5	9
M	$5\,b\,0005$	$5\,b\,4449$
N	$b\,50005$	$b\,94445$

$T_6 \equiv$

a	6
c	0
d	6
M	$6\,b\,0006$
N	$b\,60006$

$T_9 \equiv$

a	9
c	0
d	9
M	$9\,b\,0009$
N	$b\,90009$

Indicele lui T în aceste tablouri este egal cu valoarea lui a.

Se observă că T_5 şi T_6 nu vor putea da soluţii căci M şi N, sau numai unul din aceste numere, cuprinse în acele tablouri nu au terminaţiuni de patrate perfecte. De asemeni în coloana a doua din T_2 terminaţia 14 a lui N nu este de patrat perfect.

Rămâne de examinat tablourile T_1, T_9 şi coloana întâi din T_2.

Dăm acum lui b, în aceste coloane toate valorile dela 1 la 9 inclusiv, se vor forma o serie de numere M pe care urmează a le examina dacă sunt patrate perfecte şi dacă răspund enunţului. Pentru această examinare voiu întrebuinţa extrageri de rădăcini sau descompuneri în factori primi. Vom elimina dela aceste extrageri sau descompuneri numerile care vor fi divizibile cu 3 fără a fi divizibile prin 9, ceiace se constată prin simpla examinare a sumei cifrelor. De exemplu 110001 din T_1 nu va mai fi examinat căci suma cifrelor fiind 3 nu e divizibil prin 9, de asemeni 140001 din acelaşi tabel, etc,

Urmând pe această cale găsim că trebue cercetate care din numerile următorului tabel sunt patrate perfecte:

Din T_1			Din T_2		Din T_9
120001	112225	114449	410004	411116	910009
130001	122225	134449	420004	431116	920009
150001	142225	144449	430004	441116	940009
160001	152225	154449	450004	452116	950009
170001	162225	164449	460004	461116	970009
180001	172225	174449	480004	471116	980009
190001	182225	194449	490004	491116	990009
. . .	192225	. . .	. . .	. . .	. . .

Găsim că din aceste numere sunt patrate perfecte numai:

$M_1 = 112225 = 335^2$ $\quad{}^{*}_{*}{}^{*}_{*}$ $N_1 = 152221$

$M_2 = 154449 = 393^2$ $\quad{}^{*}_{*}{}^{*}_{*}$ $N_2 = 594441$

$M_3 = 172225 = 415^2$ $\quad{}^{*}_{*}{}^{*}_{*}$ $N_3 = 752221.$

Dar dintre numerele N numai N_2 este patrat perfect.

Deci singura soluție a problemei este:

$M = 154449 = 393^2 \qquad N = 594441 = 771^2,$

care dă de asemenea și:

$$9 - 1 = 2 \times 4 = 8.$$

Au rezolvat problema d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit. Iași), *Almăjan P. C.* (Caransebeș), *Băcanu I.* (Sublocot. de artilerie), *Bidoianu I. A.*, *Boerescu P. G.* (lic. Oltenița), *Bujoreanu V.* (lic. Șincai, București), *Costache N.* (lic. Oltenița), *Crivăț I. V.* (lic. Matei-Basarab. București), *Dimitriu A. I.* (bacalaureat, Galați), *Ghișoiu I. P.* (Șc. Polit., București), *Grecu M. C.* (lic. Oltenița), *Ioanițescu D.* (lic. Milit., Iași), *Ionescu-Țiu D. C.* (Șc. Milit. de Geniu), *Lungan I. D.* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupescu C.* (lic. Roman), *Marineanu Tr.* (student, București), *Mereuță E.* (lic. P.-Neamț), *Mihăileanu N.* (lic. Constanța), *Millea G. E.* (student, R.-Sărat), *Motoc D M.* (lic. Oltenița), *Nichiforescu Gh.* (Iași), *Popa Gh. I.*, *Șerban-Ulmeni D.* (lic. Oltenița), *Schuller D.* (Bacău), *Țiucra M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Tutoveanu V.* (student) și *Ungheanu Gh. M.* (lic. Oltenița).

843. — *Se unește fiecare vârf al unui patrat, cu mijloacele laturilor nealăturat. Să se demontreze că octogonul format din intersecția dreptelor duse, este semi-regulat*[1]. *Să se calculeze suprafața lui în funcție de latura a a patratului dat.*

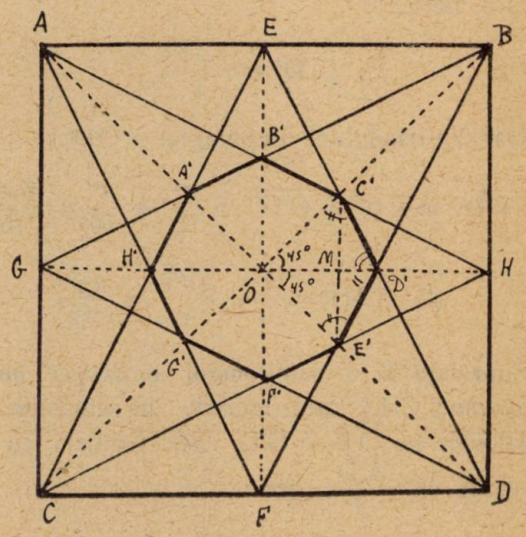
C. GEORGESCU.

1) Enunț rectificat.

Fie A B C D patrulaterul dat; O centrul său; E, F, G, H mijloacele laturilor și A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′ octogonul construit ca în enunț.

D′ fiind intersecția diegonalelor dreptunghiului E B D F, se găsește la mijlocul lui O H. La fel B′, H′, F′ sunt respectiv mijloacele lui O E, O G, O F, așa că avem:

$$(1) \qquad OB' = OD' = OF' = OH' = \frac{a}{4}$$



E′ este punctul de întâlnire al medianelor B F, C H, D O triunghiului B C D iar C′ punctul de întâlnire al medianelor triunghiului A B D, deci:

$$(2) \qquad OC' = OE' = \frac{OB}{3} = \frac{BC}{6} = \frac{a\sqrt{2}}{6} = \frac{a}{3\sqrt{2}}$$

căci valoarea diagonalei B C este $a\sqrt{2}$.

Considerând alte triunghiuri, se pot complecta relațiile (2) în felul următor:

(3) $OC' = OE' = OG' = OA' = \frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Relaţiile (1) şi (3) arată că punctele B', D', F', H' se află pe un cerc cu centrul în O şi cu raza $\frac{a}{4}$ pe când punctele C', E', G', A' se află pe un alt cerc cu centrul în O dar cu raza $\frac{a}{3\sqrt{2}}$.

Deci ortogonul construit nu este regulat.

Laturile ortogonului sunt toate egale, căci de exemplu triunghiurile $OC'D'$ şi $OE'D'$ sunt egale ca având unghiurile din O' egale cu 45°, OD' comună iar OC' şi OE' egale, deci:

$$C'D' = D'E'.$$

Se va arăta la fel că şi celelalte laturi sunt egale cu acestea. Deci octogonul este semi-regulat înţelegând prin aceasta că are toate laturile egale şi vârfurile, alternativ, pe 2 cercuri concentrice.

Să calculăm valoarea laturilor octogonului. Se vede că ED' şi HB' sunt mediane în triunghiul EOH, deci:

$$C'D' = \frac{ED'}{3}.$$

Dar din trlunghiul dreptunghic EOD' se scoate:

$$\overline{ED'}^2 = \overline{EO}^2 + \overline{OD'}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{5a^2}{16}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad C'D' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} = \frac{a\sqrt{5}}{12}.$$

Suprafaţa S a octogonului se deduce imediat observând $C'E'$, care împarte în segmente proporţionale pe OB şi OD, este paralelă cu AD şi egală cu $\frac{AD}{3}$, deci:

$$C'E' = \frac{a}{3}.$$

Fie M intersecţia lui $C'E'$ cu OH, M este şi proecţia lui C' pe OH deci suprafaţa s a triunghiului $OC'D'$ este:

$$s = \frac{1}{2} O'D \cdot C'M = \frac{a^2}{48},$$

căci $C'M$ este jumătate din $C'E'$.

Urmează că suprafaţa s_1 a patrulaterului $OC'D'E'$ este:

$$s_1 = 2s = \frac{a^2}{24}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad S = 4s_1 = \frac{a^3}{6}.$$

Observaţiuni, 1. Din cei 14 corespondenţi care au trimes soluţii la această problemă, numai d-l *Dimitriu A. I.* (Şc. Polit., Bucureşti) a dat soluţia exactă observând că octogonul nu este regulat. D-sa a şi sugerat numele de semiregulat.

Ceilalţi rezolvitori, s'au mulţumit să arate că laturile sunt egale, ceiace nu este suficient pentru a deduce că octogonul este regulat.

2. D-l *C. Georgescu*, propunătorul problemei a dat soluţia exactă, enunţul trimis de d-sa era redijat: *„Să se arate dacă acest octogon este sau nu regulat"*.

3. Se pot calcula cu uşurinţă şi unghiurile octogonului, după ce se observă mai întâi că triunghiurile egale $OC'D'$, $OD'E'$ dau:

$$\widehat{OC'D'} = \widehat{OE'D'} \quad \text{şi} \quad \widehat{OD'C'} = \widehat{OD'E'}.$$

Din triunghiul $OC'D'$ se scoate:

(1) $$\frac{OC'}{\sin D'} = \frac{OD'}{\sin C'} = \frac{C'D'}{\sin 45^0}$$

sau înlocuind numitorii prin valorile găsite în funcţie de a, găsim:

$$\sin D' = \frac{4}{\sqrt{10}} \sin 45^0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin C' = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin 45^0 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

de unde cu ajutorul logaritmilor se scoate:

$$\sphericalangle OD'C' = 63^0\ 26'\ 5'' \quad \text{aproximativ}$$

$$\sphericalangle OC'D' = 71^0\ 33'\ 55'' \quad ,,$$

Aceste valori, sau chiar numai relaţiile (4) arată că unghiurile octogonului sunt independente de mărimea laturei patratului.

A mai trimes soluţie, d-l: *Bujoreanu Vicenţiu* (lic. Şincai, Bucureşti).

852. — *Să se construiască triunghiul* ABC, *cunoscând raza cercului înscris triunghiului o latură şi suma celorlalte două laturi.*

JUSTIN N. VALCEANU

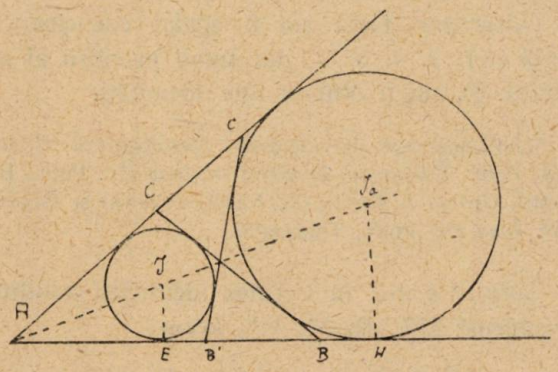
Fie ABC triunghiul cerut. Se cunosc:

$$BC = a \quad \text{şi} \quad AB + AC = b + c = l$$

şi raza r a cercului înscris. Adunând cele două egalităţi rezultă că se cunoaşte şi perimetrul $2p$. Fie I şi I_a centrul cercului înscris şi acela al cercului exînscris unghiului A tangent în H şi H′ la AB şi AC. Se ştie că:

$$AH = p \quad \text{şi} \quad AE = p - a.$$

Acum construcţia este imediată. Se ia o lungime AH egală cu p pe care se ia punctul E aşa ca AE să fie egal cu $p - a$. In E se ridică perpendiculara EI egală cu r. Se uneşte A cu I şi se



prelungeşte până se întâlneşte în I_a cu perpendiculara în H pe AH. Acum se duc tangentele comune BC şi B′C′ la cercul I şi cercul I_a de rază HI_a. Se obţin 2 soluţii.

Problema e posibilă dacă:

$$a < l.$$

1°. Soluţia aceasta este redijată după soluţia propunătorului.

2. Utilizând relaţia:

$$S = p\,r,$$

se deduce valoarea lui S. suprafaţa triunghiului, apoi din

$$2S = a\,h_a$$

se deduce înălţimea h_a. Problema este acum foarte uşoară, se cunosc a. r, h_a, p şi $b + c$. Construcţia e imediată, căci din aceste cunoscute se poate deduce şi unghiul A.

Au întrebuinţat această cale d-nii: *Ghişoiu I. P.* (bacalaureat, Bucureşti), *Mereuţă E.* (Şc. Poiitechnică, Bucureşti), *Raiceff Gh. R.* (absolvent, lic. Silistra), *Scarlat D.* (Şc. Navală, Constanţa).

3°. D-l *Mihăileanu N.* (lic. Constanţa) a dat o soluţie algebrică.

4°. Celelalte soluţii primite nu sunt acceptabile.

A mai trimes soluţie, d-l *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman):

855. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + yz = 0 \\ y + zx = 0 \\ z + xy = a. \end{cases}$$

C. BERDAN

Adunând primele două ecuaţii avem:

$$(x + y)(z + 1) = 0,$$

unde putem lua $x = -y$, sau $z = -1$.

1°. Dacă luăm $x = -y$ şi înlocuim în ultimele două ecuaţii avem:

$$\begin{cases} y(1 - z) = 0 \\ z - y^2 = a. \end{cases}$$

Acest sistem este satisfăcut, cum observăm uşor de:

$$y = 0, \quad z = a \quad \text{sau,} \quad z = 1, \quad y = \pm\sqrt{1 - a}.$$

Sistemul dat admite deci următoarele sisteme de soluţii:

x	0	$\sqrt{1-a}$	$-\sqrt{1-a}$
y	0	$-\sqrt{1-a}$	$\sqrt{1-a}$
z	a	1	1

2°. Dacă luăm $z = -1$, ultimele două ecuaţii ale sistemului dat, devin:

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ xy = a + 1, \end{cases}$$

sistem satisfăcut, dacă luăm:

$$x = y = \pm\sqrt{a + 1},$$

Sistemul dat este satisfăcut deci şi de sistemul de soluţii:

$$x = y = \pm\sqrt{a + 1}, \quad z = -1.$$

Soluţii date de d-nii: *Barbu A. Drinceanu* (absolvent, Mehedinţi), *Băcanu Ioan* (Sublocot., Sibiu) *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Coşuţă Cezar* (Bârlad), *Cristali Gh.* (Şc. Sup. de Arte şi Meserii, Iaşi), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache*, *Dimitriu C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (bacal., lic. Galaţi), *Florincescu S. N.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Firoiu Ioan* ((lic. Arad), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti),

Ionescu P. Haralamb (lic. Oltenița), *Ioniță E. Vasile* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Lucian I. David* (Șc. Polit., Timișoara), *Marineanu Traian* (student, București), *Mercescu Ilie* (lic. Timișoara), *Mereuță Emil*, (Șc. Polit., București), *Mihăileanu N. Nicolae* (lic. Constanța), *Millea Gh. Ene*, *Negrea A. Mircea* (student, București), *Motoc D. M.* (lic. Oltenița), *Oelze Emil* (Șc. Pol., Timișoara), *Parepeanu I.* (lic. Brașov), *Pogăceanu Samoil* (Șc. Polit, Timișoara), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Popescu O. Ion* (absolvent, Calafat), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă Anton* (lic. Brașov), *Raciu Gh. Raiceff* (lic. Silistra), *Rusu Liviu* (Șc. Polit., Timișoara), *Scarlat* D. (Șc. Navală, Constanța), *Ștefănescu Anibal* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Știopu Porfir* (lic. Caransebeș), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iași), *Velicescu Ch. Titu* (lic. Matei-Basarab, București) și *Weissmann Mauriciu* (lic. Constanța).

856. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{i=0}^{3} C_m^{3-i} C_n^i + C_p^1 \sum_{i=0}^{2} C_m^{2-i} C_n^i + (m+n) C_p^2 + C_p^3 = C_{m+n+p}^3,$$

unde C_r^k *înseamnă combinări de r obiecte luate câte* k $(C_r^0 = 1)$.

V. ALACI.

Prima soluție. Plecăm dela identitatea:

$$(1) \quad (1+x)^m (1+x)^n (1+x)^p = (1+x)^{m+n+p}$$

care se poate scri încă:

$$(1 + C_m^1 x + \ldots + C_m^m x^m)(1 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n) \times (1 + C_p^1 x + \ldots + C_p^p x^p) = 1 + C_{m+n+p}^1 x + \ldots + C_{m+n+p}^{m+n+p} x^{m+n+p}.$$

Vom identifica coeficienții lui x^3 din ambii membrii ai acestei identități. Pentru aceasta vom căuta coeficientul lui x^3 ce rezultă din produsul primilor doi factori și îl vom înmulți cu 1 care este primul termen din ultimul factor; vom căuta coeficientul lui x^2 ce rezultă din produsul primilor doi factori și îl vom înmulți cu C_p^1, coeficientul lui x din ultimul factor; vom căuta coeficientul lui x ce rezultă din produsul primilor doi factori și îl vom înmulți cu C_p^2, coeficientul lui x^2 din ultimul factor; vom căuta termenul liber ce rezultă din produsul primilor doi factori care este 1, și îl vom înmulți cu C_p^3, coeficientul lui x^3 din ultimul factor; facem apoi suma tuturor coeficienților lui x^3 ce i-am obținut în primul membru și o egalăm cu C_{m+n+p}^3, care este coeficientul lui x^3 din membrul al 2-lea. Obținem astfel:

$$(C_m^3 + C_m^2 C_n^1 + C_m^1 C_n^2 + C_n^3) + C_p^1 (C_m^2 + C_m^1 C_n^1 + C_n^2) + C_p^2 (C_m^1 + C_n^1) + C_p^3 = C_{m+n+p}^3,$$

Această identitate se poate scri încă, cum ușor observăm:

$$\sum_{i=0}^{3} C_m^{3-i} C_n^i + C_p^1 \sum_{i=0}^{2} C_m^{2-i} C_n^i + (m+n) C_p^2 + C_p^3 = C_{m+n+p}^3,$$

care este tocmai identitatea cerută.

Observare. Dacă am fi egalat coeficienții lui x^k $(k = 1, 2, 4, 5, \ldots)$ din ambii membrii ai identității (1), am fi obținut alte identități.

Soluții analoage, date de d-nii: *Dăscălescu St. Hristache* (Șc. Polit., București), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova) și *Pupezescu Gh. Ioan* (Sc. Polit., Timișoara).

Soluția a 2-a. In virtutea identității stabilite în problema 817 „R. M, T.", avem:

$$C_m^3 + C_m^2 C_n^1 + C_n^1 C_n^2 + C_n^3 = C_{m+n}^3$$

$$C_m^2 + C_m^1 C_n^1 + C_n^2 = C_{m+n}^2.$$

Apoi:

$$m + n = C_{m+n}^1$$

$$1 = 1.$$

Multiplicând aceste relații respectiv cu 1, C_p^1 C_p^2, C_p^3 și adunându-le avem:

$$\sum_{i=0}^{3} C_m^{3-i} C_n^i + C_p^1 \sum_{i=0}^{2} C_m^{2-i} C_n^i + (m+n) C_p^2 + C_p^3 = C_{m+n}^3 + C_{m+n}^2 C_p^1 + C_{m+n}^1 C_p^2 + C_p^3 = C_{m+n+p}^3,$$

în virtutea însăși a primei relații.

Identitatea este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Negrea A, Mircea* (student, București), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița) și *Scarlat D-tru* (Șc. Navală, Constanța).

Soluția 3-a. Insemnând cu E primul membru și scriindu-l dezvoltat avem:

$$E = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{mn(m-1)}{2} + \frac{mn(n-1)}{2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{mp(m-1)}{2}+mnp+$$

$$\frac{np(n-1)}{2}+\frac{(m+n)p(p-1)}{2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{6}=$$

$$\frac{m^3+n^3+p^3-3(m^2+n^2+p^2)+2(m+n+p)}{6}+$$

$$\frac{mn(m+n-2)+mp(m+p-2)+np(n+p-2)}{2}$$

$$+mnp=\frac{m^3+n^3+p^3+3m^2n+3m^2p+3n^2m+3n^2p+3p^2m+3p^2n+6mnp}{6}$$

$$3\frac{m^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np}{6}+\frac{2(m+n+p)}{6}$$

$$=\frac{(m+n+p)^3-3(m+n+p)^2+2(m+n+p)}{6}=$$

$$\frac{(m+n+p)[(m+n+p)^2-3(m+n+p)+2]}{6}=$$

$$\frac{(m+n+p)(m+n+p-1)(m+n+p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=$$

$$C^3_{m+n+p}.$$

Avem astfel stabilită identitatea cerută.

Soluție dată de d-nii: *Ionescu P. Haralamb* (lic, Olenița) și *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București).

A mai trimes solnție, d-l: *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina).

865. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{tg} x=\frac{\cos x+1}{\sin x-1}.$$

HARALAMB P. IONESCU

Putem scri:

$$\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos x+1}{\sin x-1}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \sin^2 x-\sin x=\cos^3 x+\cos x,$$

sau:

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin x+\cos x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad (\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x-1)=0.$$

Această ecuație este echivalentă cu următoarele:

(1) $$\sin x+\cos x=0$$

(2) $$\sin x-\cos x=1.$$

Ecuația (1) e satisfăcută de valorile:

(3) $$x=k\pi-\frac{\pi}{4},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Ecuația (2) înmulțită cu $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se poate scri:

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezolvând această ecuație, deducem:

(4) $$x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

(5) $$x=(2k+1)\pi,\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Soluțiile ecuației date sunt date de (3), (4) și (5).

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Antonescu Aurel* (Șc. Polit., București), *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Chirilov P. Victor* (Șc. Polit., Timișoara), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Donciu Th. Neculai* (lic. Bârlad), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenița), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Ioniță Vasile* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emil* (Șc. Polit., București), *Mihăileanu Nicolae* (lic. Constanța), *Millea G. Ene*, *Negrescu A. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Negrea A. Mircea* (student, București), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Parepeanu Ion* (lic. Brașov), *Patron Mihai* (lic. Milit., Iași), *Piperescu Mircea* (lic. Timișoara), *Popescu O. Ion* (absolvent, Calafat), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă Anton* (lic. Brașov), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chișinău), *Saur Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ștefănescu Anibal* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iași), *Tutoveanu Valeriu* (Șc. Polit., București), *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Velicescu G. Titu* (lic. Matei-Basarab, București).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Costăchescu C-tin* (lic. Milit., Iași), *Firoiu Ioan* (lic. Arad), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marsieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Popa Gh. Ioan* (lic, Oltenița) și *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara).

PROBLEME PROPUSE

895. — Se cer numerile de forma $a\,b\,c\,d$, știind că suma cifrelor este un număr prim, iar patratul numărului $c\,a$ este egal cu numărul format scriind consecutiv cifrele b, $b-c$, a.

HARALAMB P. IONESCU.

896. — Să se calculeze suma:

$$S = 10 + 2020 + 303030 + \ldots + n\,0\,n\,0\ldots n\,0$$

ION GH POPA

897. — Se dă dreptunghiul ABCD. Se duce dreapta EF care unește mijloacele lui AB și DC. Printr'un punct G de pe AD se duce o paralelă la AB care întâlnește pe EF în H. Să se demonstreze că vârfurile I și J ale paralelogramelor AHCI și BHDJ coincid și se află pe EF. Să se calculeze aria trapezului AHID, cunoscând $AB = a$, $AD = b$, $AG = c$.

V. ALACI

898. — Se dă triunghiul AMB dreptunghic în M. Fie O mijlocul lui AB; P piciorul bisectoarei unghiului AMB; A' intersecția lui AM cu cercul BMP; B' intersecția lui BM cu cercul AMP; M_1 intersecția lui AB' cu BA': γ intersecția lui B'P cu paralela dusă prin M_1 la AB; E și F intersecțiile aceleiași paralele cu perpendicularele în A și B pe AB; I intersecția lui MP cu M_1O; α intersecția lui OE cu AM; β intersecția lui OF cu BM; S și S' intersecțiile lui AM_1, BM_1 cu perpendiculara în mijlocul lui MP: δ, δ' intersecțiile lui IS, IS' cu AS', BS. Să se demonstreze că următoarele 11 puncte M, γ, M_1, S, α, δ, O, P, δ', S', β sunt conciclice.

COL. GH. BUICLIU

899. — Fie un triunghiu ABC și D, G intersecțiile bisectoarelor interioare și exterioare a unghiului B, respectiv cu bisectoarele exterioare și interioare a unghiului C. Fie E și F intersecțiile laturilor AB și AC respectiv cu paralelele duse la bisectoarea interioară a unghiului A, prin C și B. Să se demonstreze că punctele B, C, D, E, F, G sunt pe același cerc.

LT.-COL. O. BUGEANU.

900. — Să se stabilească identitatea:

$$\Sigma\,(x-y)(x+y+2z)(x+y-z)^2 = 4\,(x-y)(z-x)(z-y)(x+y+z).$$

CEZAR COSNITA

901. — Să se rezolve ecuația:

$$x^3 + p\,x^2 + q\,x + r = 0.$$

știind ca rădăcinele sale x_1, x_2, x_3 satisfac relația:

$$x_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2 + x_3},$$

și care este relația dintre coeficienți?

AURELIAN I STAN.

902. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} a \sin(\operatorname{arc\,tg} x) + b \cos(\operatorname{arc\,tg} y) = k_1 \\ \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = k_2\,\pi. \end{cases}$$

ION MARGINEANU

903. — Să se rezolve ecuația:

$$x^3 + \frac{2\,a\,r_a}{r - r_a}\,x^2 + \frac{(h_a + h_b + h_c)\,b\,c}{h_a}\,x - \frac{8\,s^2\,p}{\Sigma\,h_a\,h_b} = 0$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

Când ecuația are o rădăcină triplă?

CRIVAT I VLADIMIR

904. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} (\sin k\,x - \cos k\,x)}{\sum_{k=1}^{n} (\sin k\,x + \cos k\,x)} = \operatorname{tg}\left(\frac{n+1}{2}\,x - \frac{\pi}{4}\right).$$

EMIL MEREUTA

INFORMAȚIUNI

Dragutin Ciupe (director). Probleme rezolvate din aritmetică și algebră (Metoda cea mai lesnicioasă pentru a învăța în scurt timp „Regula de trei simplă și compusă, fără profesor). Prețul 20 lei plus porto; a se adresa autorului: Str. Ungurească No. 30, Bistrița, Jud. Năsăud.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 MAIU 1930 NO. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CONST. BERDAN. UN SISTEM DE ECUATIUNI
2. NOTE MATEMATICE: 8, 9
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 828, 837, 838, 846, 859, 861, 862, 868, 870, 871, 873
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea să anunţăm că mai face parte din Comitetul Revistei şi d-l **Emil Mihaiu,** profesor la Şcoala Comercială din Timişoara şi Actuar Matematic diplomat.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

UN SISTEM DE ECUAȚIUNI

de C-TIN BERDAN

1. Voiu rezolva sistemul următor:

$$\frac{b_{11}x_1+b_{12}x_2+\ldots+b_{1n}x_n}{s_k}=a_1;$$

$$\frac{b_{21}x_1+b_{22}x_2+\ldots+b_{2n}x_n}{s_k}=a_2\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\ldots+b_{nn}x_n}{s_k}=a_n,$$

unde s_k este un polinom omogen, simetric de gradul k în raport cu $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Cu ajutorul determinanților putem calcula x_i în funcție de a, b, s_k.

Calculăm s_k în funcție de a, b, s_k și obținem:

$$s_k = f(a, b)\, s_k^k.$$

Deci sistemul are k grupe de valori.

2. *Aplicație.* Fie sistemul:

$$\frac{bx_1+cx_2}{x_1x_2\ldots x_n+\Sigma x_1^n}=a_1,\quad \frac{bx_2+cx_3}{x_1x_2\ldots x_n+\Sigma x_1^n}=a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{bx_n+cx_1}{x_1x_2\ldots x_n+\Sigma x_1^n}=a_n.$$

Se deduce:

$$x_1=\frac{a_1b^{n-1}-a_2cb^{n-2}}{(-1)^{n-1}c^n+b^n}(x_1x_2\ldots x_n+\Sigma x_1^n)$$

$$s_n=s^n\left[\prod\frac{a_1b^{n-1}-a_2cb^{n-2}}{(-1)^{n-1}c^n+b^n}\right)+$$

$$\Sigma\left(\frac{a_1b^{n-1}-a_2cb^{n-2}}{(-1)^{n-1}c^n+b^n}\right)^n\Bigg].$$

De unde rezultă:

$$x_1=\frac{\dfrac{a_1b^{n-1}-a_2cb^{n-2}}{(-1)^{n-1}c^n+b^n}}{\sqrt[n-1]{\prod\left(\dfrac{a_1b^{n-1}-a_2cb^{n-2}}{(-1)^{n-1}c^n+b^n}\right)+\Sigma\left(\dfrac{a_1b^{n-1}-a_1cb^{n-2}}{(-1)^{n-1}c^n+b^n}\right)^n}}.$$

3. Sistemul:

$$\frac{2\Sigma xy-\Sigma x^2}{2(y+z-x)}=a \qquad \text{etc.}$$

are rădăcinile:

$$x=\frac{a(b+c)}{\Sigma a}.$$

4. Deci sistemul:

$$\frac{x(y+z)}{\Sigma x}=a \qquad \text{etc.}$$

are rădăcinile:

$$x=\frac{2\Sigma ab-\Sigma a^2}{2(b+c-a)}.$$

Acest sistem formează obiectul problemei 3047 din *Gazeta Matematică*.

Voiu da încă o soluție problemei 3047 din *Gazeta Matematică* luând în considerație nota marginală ce întovărășește soluția acestei probleme.

Considerăm un triunghiu cu laturile de rezistențe x_1, x_2, x_3 la extremitățile cărora aplicăm pe rând tensiunea V.

Legile lui *Kirchoff* ne conduc la relațiuni între rezistențe și curenți:

$$V=\frac{x_1(x_2+x_3)}{\Sigma x_1}I_1=\frac{x_2(x_3+x_1)}{\Sigma x_1}I_2=\frac{x_3(x_1+x_2)}{\Sigma x_1}I_3$$

$$=x_1i_1=x_2i_2=x_3i_3.$$

Deducem:

$$(1)\qquad \frac{1}{I_1}=\frac{i_2+i_3}{\Sigma i_1 i_2}=\frac{a}{v},\quad \frac{1}{I_2}=\frac{i_3+i_1}{\Sigma i_1 i_2}=\frac{b}{v},$$

$$\frac{1}{I_3}=\frac{i_1+i_2}{\Sigma i_1 i_2}=\frac{c}{v}.$$

Sistemul (1) este un caz particular al sistemului general 1.

$$i_1=\frac{\Sigma i_1 i_2}{2v}(b+c-a)=\frac{2v(b+c-a)}{2\Sigma ab-\Sigma a^2}.$$

Observăm că sistemul:

$$\frac{x_1(x_2+x_3)}{\Sigma x_1}=a \qquad \text{etc.}$$

s'a soluționat, căci:

$$x_1=\frac{v}{i_1}=\frac{2\Sigma ab-\Sigma a^2}{2(b+c-a)} \qquad \text{etc.}$$

6. Soluția de mai sus (5) revine la a întrebuința necunoscutele:

$$X_1=\frac{1}{x_1},\quad X_2=\frac{1}{x_2},\quad X_3=\frac{1}{x_3}.$$

7. Luând necunoscutele:

$$X_1=\frac{1}{x_2x_3},\quad X_2=\frac{1}{x_3x_1},\quad X_3=\frac{1}{x_1x_2}$$

avem sistemul:

$$\frac{x_2+x_3}{x_2x_3\Sigma x_1}=a,\ \text{etc.};\quad x_1=\frac{4(a^2-b^2-c^2+2bc)}{(2\Sigma ab-\Sigma a^2)^2}.$$

8. Se poate rezolva încă problema 3047, calculând Σx, Σxy și xyz din Σa, Σab, abc, formându-se ecuația de gradul III ce rezolvă sistemul

Această ecuație este:

$$X^3-\frac{(\Sigma a^2-2\Sigma ab)^2}{2(\Sigma a^2b-2abc-\Sigma a^3)}X^2+$$

$$\frac{(\Sigma a^2-2\Sigma ab)^2\Sigma a}{4(\Sigma a^2b-2abc-\Sigma a^3)}X+$$

$$\frac{[\Sigma a^2-2\Sigma ab)^3}{8(\Sigma a^2b-2abc-\Sigma a^3)}=0.$$

9. Generalizarea directă a sistemului ce formează problema 3047 este următorul sistem:

$$\frac{x_1(\Sigma x_1-x_1)}{\Sigma x_1}=a_1,\ldots\ \frac{x_n(\Sigma x_1-x_n)}{\Sigma x_1}=a_n$$

care se mai poate scrie:

$$\Sigma x_1=\frac{x_1^2}{x_1-a_1}=\ldots=\frac{x_n^2}{x_n-a_n}.$$

NOTE MATEMATICE

8. *Asupra problemei 728.*

A fost propusă de către d-l *prof. V. Alaci* la ultimul concurs al R. M. T., s'a rezolvat în N° 1 din an. IX și asupra ei s'a publicat o notă în N° 4 din același an de către d-l *Zagaican Ilie.*

Îmi propun problema:

Se dă un carton circular și omogen de centru O. De o parte și de alta a centrului se duc două coarde paralele AB *și* CD, *egale respectiv cu latura poligonului regulat de n_1 și n_2 laturi, înscrise în cercul O.*

Se fac în cartonul dat două deschideri circulare, cercurile de deschidere fiind înscrise respectiv în triunghiurile OAB *și* OCD. *Se cere centrul de greutate al cartonului rămas, după ce am scos cele două discuri circulare.*

Voiu rezolva problema bazat pe teoria momentelor. S'ar putea încerca o soluție compunând forțele paralele F, F_1, F_2, după metoda întrebuințată de d-l *prof. V. Alaci*, cu ocazia publicării problemei. (Vezi figura R. M. T. an. IX, N° 1, p. 8.)

Să punem:

$$AB=l_1,\quad CD=l_2.$$

Știm că:

$$l_1=2a\sin\frac{\pi}{n_1},\quad l_2=2a\sin\frac{\pi}{n_2}$$

Apoi:

$$\overline{OM_1}^2=a^2-a^2\sin^2\frac{\pi}{n_1}=a^2\left(1-\sin^2\frac{\pi}{n_1}\right)$$

deci

$$OM_1=a\cos\frac{\pi}{n_1},\quad OM_2=a\cos\frac{\pi}{n_2}$$

Avem:

$$r=\frac{s}{p}.$$

$$2s_1=a^2\sin\frac{2\pi}{n_1},\quad 2s_2=a^2\sin\frac{2\pi}{n_2},$$

$$p_1=a\left(1+\sin\frac{\pi}{n_1}\right),\quad p_2=a\left(1+\sin\frac{\pi}{n_2}\right)$$

și prin urmare:

$$r_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n_1}}{1 + \sin \frac{\pi}{n_1}}, \qquad r_2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n_2}}{1 + \sin \frac{\pi}{n_2}}.$$

Mai departe:

$$O I_1 = O M_1 - r_1 = a \cos \frac{\pi}{n_1} - \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{n_1}}{1 + \sin \frac{\pi}{n_3}} =$$

$$= \frac{a}{2}\left(2 \cos \frac{\pi}{n_1} - \frac{2 \sin \frac{\pi}{n_1} \cos \frac{\pi}{n_1}}{1 + \sin \frac{\pi}{n_1}} \right) =$$

$$= a \cos \frac{\pi}{n_1}\left[\frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{n_1}} \right] = a \frac{\cos \frac{\pi}{n_1}}{1 + \sin \frac{\pi}{n_1}}.$$

La fel:

$$O I_2 = a \frac{\cos \frac{\pi}{n_2}}{1 + \sin \frac{\pi}{n_2}}$$

Avem încă:

$$S = \pi a^2, \quad S_1 = \pi \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{n_1}}{\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2},$$

$$S_2 = \pi \frac{a_2}{4} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{n_2}}{\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2},$$

$$S_T = \pi a^2 \left[1 + \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{n_1}}{4\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2} + \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{n_2}}{4\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2 \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2} \left[4\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2 \times \right.$$

$$\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{n_1}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2 +$$

$$\left. + \sin^2 \frac{2\pi}{n_2}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2 \right]$$

Diametrul $I_1 I_2$ fiind o axă de simetrie a figurii, centrul de greutate se va găsi pe el. Să luăm momentele în raport cu punctul O. Simplificând cu πa^2, avem:

$$\frac{\bar{x}}{4\left(1+\sin\frac{\pi}{n_1}\right)^2\left(1+\sin\frac{\pi}{n_2}\right)^2} \left[4\left(1+\sin\frac{\pi}{n_1}\right)^2\left(1+\sin\frac{\pi}{n_2}\right)^2 + \right.$$

$$+ \sin^2 \frac{2\pi}{n_1}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{n_2}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2 \Big] =$$

$$= a \frac{1}{4\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^3 \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^3} \left[\cos \frac{\pi}{n_1} \sin^2 \frac{2\pi}{n_1} \times \right.$$

$$\left. \left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^3 - \cos \frac{\pi}{n_2} \sin^2 \frac{2\pi}{n_2}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^3 \right]$$

De aici scoatem:

$$\bar{x} = a \frac{\cos \frac{\pi}{n_1} \sin^2 \frac{2\pi}{n_1}\left(1+\sin \frac{\pi}{n_2}\right)^3 - \cos \frac{\pi}{n_2} \sin^2 \frac{2\pi}{n_2}\left(1+\sin \frac{\pi}{n_1}\right)^3}{\left(1+\sin \frac{\pi}{n_1}\right)\left(1+\sin \frac{\pi}{n_2}\right)\left[4\left(1+\sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2\left(1+\sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{n_1}\left(1+\sin \frac{\pi}{n_2}\right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{n_2}\left(1+\sin \frac{\pi}{n_1}\right)^2 \right]}$$

Observații. I. Pentru ca $\bar{x}$ să fie nul trebue ca:

$$\frac{\cos \frac{\pi}{n_1} \sin^2 \frac{2\pi}{n_1}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_2}\right)^3}{\cos \frac{\pi}{n_2} \sin^2 \frac{2\pi}{n_2}\left(1 + \sin \frac{\pi}{n_1}\right)^3} = 1,$$

ceeace se întâmplă în general pentru $n_1 = n_2$, lucru ce se vedea a priori.

II. Pentru $n_1 = 4$, $n_2 = 6$ suntem în cazul problemei 728.

I. MURAROIU
Șc. Polit. București

9. *Generalizarea problemei 761 din R. M. T.*

Această problemă se poate generaliza astfel:

Fie ABC un triunghiu oarecare şi P un punct al cubicei lui *Darboux* a triunghiului. Transversalele unghiulare ale punctului P retae cercul ABC în A_1, B_1, C_1. Se notează prin A', B', C' proecţiile acestor puncte respectiv pe BC, CA, AB. Fie apoi A'_b, A'_c proecţiile punctului A' pe A_1B şi A_1C iar B'_a, B'_c; C'_a, C'_b punctele analoage. Dreptele $A'_b A'_c$, $B'_c B'_a$, $C'_a C'_b$ tae laturile BC, CA, AB în trei puncte colineare.

Soluţiune: Folosim figura dela pagina 42, vol. IX.

Deducem ca acolo relaţiile:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{\overline{A'C}^2}{\overline{A'B}^2}=1\,;\quad \frac{NC}{NA}\cdot\frac{\overline{B'A}^2}{\overline{B'C}^2}=1\,;\quad \frac{PA}{PB}\cdot\frac{\overline{C'B}^2}{\overline{C'A}^2}=1,$$

în care: $M\equiv(BC,\ A'_b A'_c)$; $N\equiv(CA,\ B'_c B'_a)$; $P\equiv(AB,\ C'_a C'_b)$.

Aceste relaţii înmulţite ne dau:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=\left(\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}\right)^2.$$

Punctele A', B', C' sunt însă, din chiar definiţia cubicei lui *Darboux*, picioarele a trei ceviene în triunghiul ABC; deci:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=(-1)^2=+1,$$

adică punctele M, N, P sunt colineare.

Particularizând punctul P obţinem diferite proprietăţi particulare.

Astfel dacă P este centrul cercului ABC suntem în cazul problemei 761. In acest caz dreptele AA', BB', CC' concură în reciprocul ortocentrului triunghiului dat.

Dacă P este ortocentrul triunghiului ABC, punctele A', B', C' sunt picioarele înălţimilor.

Dacă P este centrul cercului înscris în ABC, punctele A_1, B_1, C_1 sunt mijloacele arcelor BC, CA, AB subîntinse de laturile triunghiului.

CEZAR COSNITA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 8, Aprilie 1930. Géométrie et mécanique, par *V. Thébault*. Două proprietăţi ale patrulaterului, de *D. Barbilian*. O transformare geometrică şi aplicaţiile ei, de *Alex. Niculescu*.

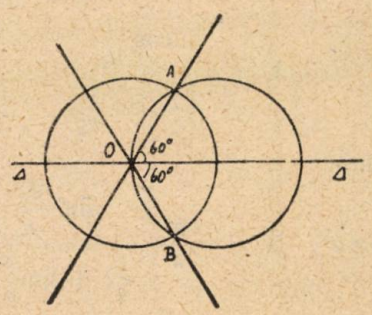
2. *Ernest Abason. Memoriu de titluri, lucrări şi activitate didactică.*

3. *Ernest Abason.* Contributions à l'étude du coefficient de déformation des fonctions non sinusoïdales. (Institut National Roumain, pour l'étude de l'aménagement et de l'utilisation des sources d'énergie).

PROBLEME REZOLVATE

828. — *Fie O şi O' două cercuri egale aşa fel ca fie-care din ele să treacă prin centrul celuilalt. Dacă centrul O este fix, iar celalt O' se mişcă pe o dreaptă ce trece prin O, să se găsiască locul geometric al punctelor de intersecţie ale celor două cercuri.*

JUSTIN N. VALCEANU



Fie Δ dreapta pe care se mişcă O'; A şi B intersecţia celor două cercuri. Triunghiurile OAO' şi OBO' având toate laturile egale prin construcţie sunt echilaterale, deci

$$\widehat{AOO'}=\widehat{BOO'}=60^0.$$

Dreapta OA şi dreapta OB, pe care se mişcă A şi B sunt iixe. Locul cerut se compune deci din două drepte prelungite la înfinit de o parte şi de alta a lui O şi care fac 60^0 cu Δ.

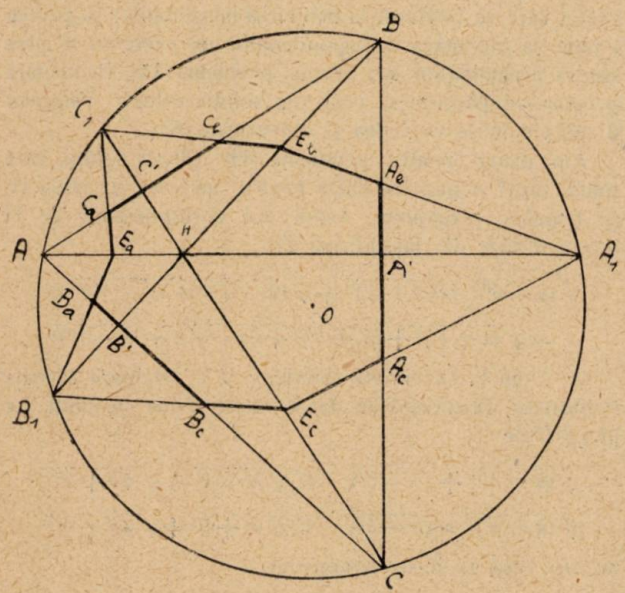
Au rezolvat foarte bine problema pe această cale d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Militar, Iaşi); *Almăjan P.* (Bacalaureat, Caransebeş); *Bugeanu C.* (Lic. Diaconovici Loga, Timişoara); *Chirilă Gh.* (Lic. Militar, Iaşi); *Dimitriu A. I., Ghişoiu I. P.* (Şc. Politecnică, Bucureşti); *Grossu I. M.* (Lic. Carol I, Craiova); *Ionescu-Ţiu D. C.* (Şc. Mil. de Geniu); *Ştefănescu A.* (Lic. Mihai Viteazul); *Teodorescu St.* (Lic. Militar, Iaşi).

Au trimis foarte bune soluții analitice d-nii: *Almăjan P.* (Bacalaureat, Caransebeș); *Dimitriu A. I., Ghișoiu I. P.* (Șc. Politecnică, București); *Hamerak C.* (Caransebeș); *Ionescu-Țiu D. C.* (Șc. Militar de Geniu); *Nichiforescu Gh., Petrovici D.* (Studenți); *Popovici Gh. V.* (Lic. Câmpina).

837. — *Fie* E_a, E_b, E_c *punctele lui Euler ale unui triunghiu* ABC *și* $A_1B_1C_1$ *punctele unde înălțimele tae cercul circumscris acestui triunghiu. Dreptele* A_1E_b, A_1E_c *determină pe latura* BC *punctele* A_b, A_c. *Analog se obțin punctele* B_c *și* B_a, C_a *și* C_b. *Se cere suprafața poligonului* $A_bA_cE_cB_cB_aE_aC_aC_bE_b$, *cunoscând suprafața triunghiului* ABC.

JUSTIN N. VALCEANU

Fie H ortocentrul; A', B', C' picioarele înălțimelor triunghiului ABC; S_9 suprafața poligonului cerut și S suprafața lui ABC.



Avem:

(1) $S_9 = \text{aria}(E_aE_bE_c) + \text{aria}(E_bE_cA_cA_b) + \text{aria}(E_cE_aB_aB_c) + \text{aria}(E_aE_bC_bC_a)$.

Triunghiurile ABC și $E_aE_bE_c$ sunt asemenea, raportul laturilor omoloage fiind 2, căci E_a, E_b, E_c sunt mijloacele lui HA, HB, HC.

Rezultă deci:

(2) $$\text{aria}(E_aE_bE_c) = \frac{S}{4}$$

Observăm apoi că pentru aria trapezului $E_bE_cA_cA_b$, putem scri:

(3) $$\text{aria}(E_bE_cA_cA_b) = (E_bE_c + A_BA_c)\cdot\frac{HA'}{4}$$

Dar:

$$E_bE_c = \frac{a}{2},\quad A_bA_c = \frac{a}{3},\quad \text{căci } A'B, A_1E_b$$

sunt mediane în triunghiul HBA_1, $\left(A'A_b = \frac{A'B}{3},\right.$

asemenea $A'A_c = \frac{A'C}{3}$ și atunci adunând avem

$$\left.A_qA_c = \frac{a}{3}\right),$$

iar:

$$HA' = 2R\cos B\cos C \quad \text{(F. G. M. p. 183.}$$

astfel că relația (3) devine:

(4) $$\text{aria}(E_bE_cA_cA_b) = \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\frac{R\cos B\cos C}{2} = \frac{5R}{12}a\cos B\cos C$$

Analog deducem:

(5) $$\text{aria}(E_cE_aB_aB_c) = \frac{5R}{12}b\cos C\cos A$$

(6) $$\text{aria}(E_aE_bC_bC_a) = \frac{5R}{12}c\cos A\cos B$$

Introducând în (1), expresiile date de (2), (4) și (5), avem:

$$S_9 = \frac{S}{4} + \frac{5R}{12}\sum a\cos B\cos C =$$

$$\frac{S}{4} + \frac{5R^2}{6}\sum \sin A\cos B\cos C =$$

$$\frac{S}{4} + \frac{5R^2}{6}[\sin(A+B+C) + \sin A\sin B\sin C] =$$

$$\frac{S}{4} + \frac{5}{12}\cdot 2R^2\sin A\sin B \text{ și } C =$$

$$\frac{S}{4} + \frac{5S}{12} = \frac{2}{3}S$$

Suprafața poligonului cerut este deci $\frac{2}{3}$ din a triunghiului ABC.

Soluții foarte bune date de d-nii: *Coșniță Cezar* (Bârlad) și *Rusu Liviu* (Sc. Politechnică, Timișoara.

S'a primit și o soluție greșită.

838. — *Să se demonstreze că ori care ar fi relaţiunea de mărime între cantităţile reale, pozitive sau negative, a, b, a', b', între aceste cantităţi există neegalitatea.*

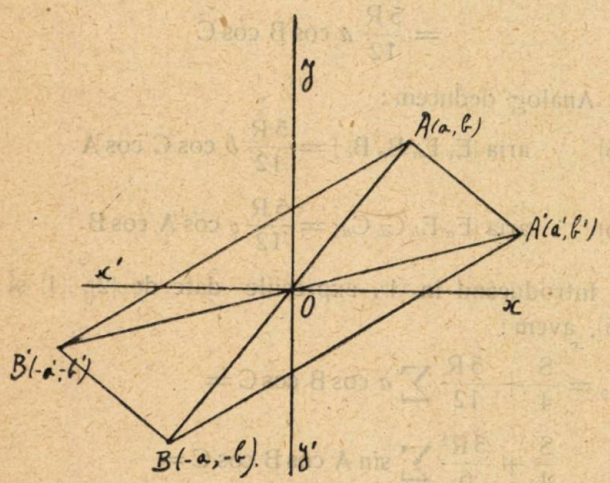
$$\frac{\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}+\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}}{2}<$$

$$<\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}$$

COL. GH. BUICLIU

Soluţie dată de d-l *Justin N. Vâlceanu* (Şc. Politecnică, Timişoara.)

Fie O_x, O_y un sistem de două axe dreptunghiulare şi $A(a,b)$, $B(-a,-b)$, $A'(a',b')$, $B'(-a',-b')$ patru puncte din plan raportate la aceste axe. Punctele A şi A' sunt oare care iar B şi B' simetricele primelor faţă de origină aşa că figura $AA'BB'$ este un paralelogram *oarecare* cu centrul în O.



De pe figură, *oricare* ar fi punctele A şi A' în plan, deci *oricare* ar fi cantităţile *a*, *b*, *a'*, *b'*, avem

$$\overline{AB'}=\overline{A'B}=\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}$$

$$\overline{AA'}=\overline{BB'}=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$$

$$\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\overline{OA'}=\overline{OB'}=\sqrt{a'^2+b'^2}$$

de unde se deduce că inegalitatea de demonstrat, este tot una cu:

$$\overline{AB'}+\overline{AA'}<2(\overline{OA}+\overline{OA'})=\overline{AB}+\overline{A'B'}$$

adică suma a 2 laturi adiacente într-un paralelogram este mai mică de cât suma diagonalelor acelui parablogram, ceia ce este adevărat, căci fie-care din laturile paralelogramului este mai mică de cât suma jumătăţilor diagonalelor de oare ce, de exemplu, în triunghiul OAA' avem

$$AA'<OA+OA'.$$

Observaţiuni. 1°. In soluţia problemei 789, dată în R. M. T. vol. IX. p. 71, am arătat unul din viciile de demonstraţie care se întâlnesc la mânuirea inegalităţilor şi, pentru a pune la îndemâna corespondenţilor un exerciţiu în plus asupra neegalităţilor am propus problema 838, elementară şi uşoară după cum se vede din soluţia d-lui *J. Vâlceanu* şi după cum se va vedea şi din următoarele.

Am primit pentru problema 838 câteva soluţii, care conţin erori nepermise chiar pentru un elev de clasa IV cu actualelc programe. Astfel doi corespondenţi de la Liceul Militar din Iaşi afirmă că

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}+\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}=$$

$$=\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2+(a-a')^2+(b-b')^2}$$

2°. D-nii *V. Tutoveanu* (Student) şi *E. Mereuţă* (Şcoala Politecnică, Bucureşti) au dat o soluţie bună sprijiniţi pe inegalităţile

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}<\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}$$

$$\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}<\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}$$

pe care însă nu le-au demonstrat.

3°. D-l *C. Coşniţă* (Bârlad) şi-a propus să generalizeze problema şi să demonstreze neegalitatea

$$\frac{\sqrt{(a_1+a'_1)^2+(a_2+a'_2)^2+\ldots+(a_n+a'_n)^2}+\sqrt{(a_1-a'_1)^2+(a_2-a'_2)^2+\ldots+(a_n-a'_n)^2}}{2}<$$

$$<\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+\ldots+a'^2_n}$$

Demonstrarea dată de d-sa însă nu este riguroasă, căci în cursul demonstraţiei ajunge, de exemplu, la neegalitatea

$$a_1a'_1+a_2a'_2+\ldots+a_na'_n<$$

$$<\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(a'^2_1+a'^2_2+\ldots+a'^2_n)}$$

pe care o ridică la patrat fără a fi dovedit în prealabil că prin aceasta nu s-a schimba senzul neegalităţii, ceia ce ar fi posibil dat fiind că nu toate cantităţile $a_1, a_2, \ldots a_n$, $a'_1, a'_2, \ldots a'_n$ sunt pozitive.

Totuşi generalizarea d-lui *C. Coşniţă* este adevărată şi

aşteptăm să ni-o trimită rigoros exactă pentru a o publica sub formă de notă matematică.

Utilizând neegalitatea generalizată, d-sa găseşte următoarele inegalităţi foarte interesante între laturite a, b, c ale unui triunghiu A B C şi laturile α, β γ ale triunghiului său ortic, precum şi între unghiurile A, B, C:

$$\frac{\sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2+(c+\gamma)^2}+\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}}{2} <$$

$$< \sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

$$\sqrt{\sin^2 A \cos^4\frac{A}{2}+\sin^2 B\cos^4\frac{B}{2}+\sin^2 C\cos^4\frac{C}{2}}+$$

$$+\sqrt{\sin^2 A\sin^4\frac{A}{2}+\sin^2 B\sin^4\frac{B}{2}+\sin^2 C\sin^4\frac{C}{2}} <$$

$$< \sqrt{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}+\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C}$$

4°. Iată o soluţie algebrică elementară a problemei 838. — Fie numerile imaginare

$$a+b\,i \quad \text{şi} \quad a'+b'\,i$$

Se ştie că *modulul sumei acestor numere este mai mic de cât suma modulurilor lor,* deci

$$(1) \qquad \sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} < \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+b'^2}$$

Fie acum imaginarele

$$a+b\,i \quad \text{şi} \quad -a'-b'\,i$$

Aceiaşi teoremă dă

$$(2) \qquad \sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2} < \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}$$

Adunând (1) cu (2), care au ambii membri pozitivi, se găseşte inegalitatea de demonstrat. D-l *Mihăileanu N. Nicolae*, a dat soluţie pe această cale, dar cu mai multe calcule.

Pe această cale se poate obţine şi generalizarea d-lui *C. Coşniţă*, căci teorema modulurilor este adevărată pentru un număr oare care de imaginare.

Această generalizare a fost trimisă şi de d-l *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti). *Gh. B.*

846. — *Dacă ecuaţia:*

$$a_0+a_1x+a^2x^2+\ldots+a_px^p=0,$$

are toate rădăcinele reale şi negative, atunci toate rădăcinele ecuaţiei:

$$s\,a_0+(s+2)\,a_1x+(s+4)\,a_2x^2+\ldots+$$
$$+(s+2p)\,a_px^p=0,$$

(s intreg pozitiv), sunt reale şi negative.

Dacă prima ecuaţie are toate rădăcinele reale şi pozitive, toate rădăcinele ecuaţiei a doua sunt reale şi pozitive.

P. SERGESCU

Observăm uşor că primul caz se reduce la al 2-lea, înlocuind în ecuaţia dată presupusă cu toate rădăcinele reale şi negative precum şi în ecuaţia cerută, pe x prin $-x$.

Fie deci ecuaţia:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p=0,$$

cu toate rădăcinele reale şi pozitive, atunci urmează că ecuaţia

$$(1) \qquad a_0+a_1y^2+a_2y^4+\ldots+a_py^{2p}=0$$

are toate rădăcinele reale. Inmulţim cu y^s (s întreg pozitiv), şi avem:

$$(2) \qquad a_0y^s+a_1y^{s+2}+\ldots+a_py^{s+2p}=0,$$

care are şi ea toate rădăcinele reale. In virtutea teoremei lui *Rolle*, ecuaţia derivată are şi ea toate rădăcinele reale. Derivând deci ecuaţia (2) şi suprimând factorul y^{s-1}, rezultă că:

$$a_0+(s+2)\,a_1y^2+\ldots+(s+2p)\,a_py^{2p}=0,$$

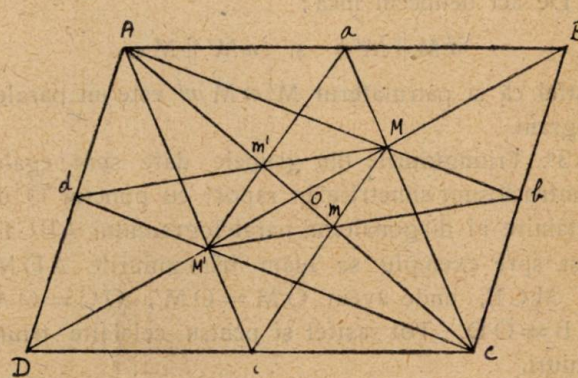
are toate rădăcinele reale. Punând $y^2=x$, urmează că ecuaţia:

$$a_0+(s+2)\,a_1x+\ldots+(s+2p)\,a_px^p=0,$$

are toate rădăcinele pozitive. Aceasta trebuia tocmai dovedit.

Soluţie dată de d-nu: *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit. Bucureşti).

859. — *Se unesc vârfurile* A *şi* C *ale unui paralelogram* A B C D *cu mijloacele laturilor opuse, aceste mijloace fiind însemnate cu a, b, c, d. Intersecţia dreptelor* C *d cu* A *c şi* C *a cu* A *b fiind respectiv* M' *şi* M, *iar dreptelor* M *c cu* M' *b şi* M' *a cu* M *d fiind m, m', să se arate că:*



1°. *Punctele* B, M, M', D *şi punctele* A, *m'*, *m*, C *sunt respectiv colineare.*

2°. *Patrulaterele* $aMcM'$; $bM'dM$; $MmM'm'$ *sunt paralelograme.*

3°. *Triunghiurile din grupele: I.* AdM', MCb; *II.* $M'cC$, AaM; *III.* $M'Dd$, MBb; *IV.* MBa, $M'Dc$ *sunt egale.*

ION MARGINEANU

1°. In triunghiul ABC, M este punctul de întâlnire a două mediane Ab şi Ca, el se va găsi şi pe mediana a treia, deci pe BO (O fiind punctul de întâlnire al diagonalelor paralelogramului ABCD). Analog din triunghiul ADC deducem că M' se află şi el pe diagonala DB.

Deci punctele D, M', M, B sunt colineare şi încă $M'O = MO$.

Inainte de a arăta că şi punctele A, *m'*, *m*, C sunt coliniare, voi stabîli următoarea proprietate:

Dacă M *şi* M' *sunt două puncte pe latura* DB *a unui triunghiu* ADB *simetrice faţă de mijlocul* O *al acelei laturi, iar a şi d mijloacele laturilor* AB *şi* AD, *dreptele* dM *şi* aM' *se intersectează pe mediana corespunzătoare laturei* BD.

Intr'adevăr considerând trapezul $adM'M$, diagonalele acestui trapez aM' şi dM se intersectează pe dreapta ce uneşte mijloacele bazelor, adică pe AO. Aşa fiind, rezultă că considerând triunghiurile ADB şi BCD, punctele *m* şi *m'* se află pe diagonala AC a paralelogramului ABCD şi deci punctele A, *m'*, *m*, C sunt colineare.

2°. Avem:

$$OM = OM', \quad Oa = Oc, \quad Od = Ob,$$

de unde rezultă că patrulaterele $aMcM'$ şi $bM'dM$ sunt paralelograme.

De aci deducem încă:

$$dM \parallel M'b \quad \text{şi} \quad aM' \parallel Mc,$$

astfel că şi patrulaterul $M'mMm'$ este un paralelogram.

3°. Triunghiurile din grupele date sunt egale, pentrucă sunt simetrice în raport cu punctul O de întâlnire al diagonalelor paralelogramului ABCD. Aşa spre exemplu să luăm triunghiurile ADM' şi MCB, unde avem $OM = OM'$, $OC = OA$, $OB = OD$. Tot astfel şi pentru celelalte triunghiuri.

Observare. Redactarea de mai sus este acea dată de d-nul *Vâlceanu N. Iustin* (Şc. Politecnică, Timişoara).

Au soluţionat problema şi d-nii: *Bugeanu C.* (Lic. Timişoara), *Boerescu P. George* (Lic. Oltenita), *Chirilov P. Victor* (Şc. Polit. Timişoara), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Ghişoin I. Petre* (Şc. Polit. Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (Lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit. Bucureşti), *Mihăileanu Nicolae* (Lic. Constanţa), *Motoc D. M.* (Lic. Oltenita), *Patron Mihai* (Lic. Milit. Iaşi), *Pogăceanu Samoil* (Sc. Polit. Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita) şi *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit. Iaşi).

Au mai trimes soluţiuni şi d-nii: *Bujoreanu Vicenţiu* (Lic. Şincai, Bucureşti), *Firoiu Ioan* (Lic. Arad) şi *Mihăileanu N.* (Lic. Constanţa).

861. — *Dacă a şi b sunt numere reale,* $a < b$, *să se demonstreze că avem:*

$$a < \frac{81}{256} \cdot \frac{(b-a)^4}{\left(\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[4]{a^3}\right)^4} < b$$

Să se verifice în cazul particular $a = 1$, $b = 2$.

V. ALACI

Chestiunea ce am propus-o este o aplicaţie a *„Teoremei creşterilor finite“.*

Se ştie dacă avem o funcţiune continuă într'un interval,

$$y = f(x)$$

atunci, avem relaţiunea:

$$(1) \qquad f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \quad , \quad a < c < b$$

a şi b fiind în intervalul de continuitate.

Să aplicăm identitatea (1), funcţiunei:

$$(2) \qquad f(x) = x^{\frac{3}{4}},$$

deci:

$$(3) \qquad f'(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Aplicând identitatea (1), funcţiunei (2) şi ţinând seamă de (3), avem:

$$b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[4]{c}}, \text{ unde } a < c < b.$$

De aci deducem:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[4]{a^3}}{b-a} = \frac{1}{\sqrt[4]{c}}$$

Ridicând la puterea 4^a și inversând, găsim:

$$c = \frac{81}{256} \cdot \frac{(b-a)^4}{\left(\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[4]{a^3}\right)^4}$$

Cum știm că, $a < c < b$, rezultă ușor:

$$a < \frac{81}{256} \cdot \frac{(b-a)^4}{\left(\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[4]{a^3}\right)^4} < b,$$

adică relația cerută.

Caz particular, $a = 1, b = 2$. In acest caz, dubla inegalitate cerută devine:

$$(4) \qquad 1 < \frac{81}{256} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[4]{8} - 1\right)^4} < 2$$

Cum: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}8284..$
rezultă:

$$\sqrt[4]{8} = 1{,}68..,$$

deci (4) devine:

$$1 < \frac{81}{256} \cdot \frac{1}{0{,}684} < 2$$

Extrăgând rădăcina 4^a, avem:

$$1 < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0{,}68} < \sqrt{1{,}41\,42..}$$

$$*** \quad 1 < \frac{300}{272} < 1{,}18..,$$

ceiace ușor se verifică.

Soluții directe, dar nesuficiente au dat d-nii: *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Mihăileanu N. Nicolae* (Lic. Constanța), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), și *Țiucrea Mircea* (Șc. Polit., Timișoara).

862. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + x^n(y^n + 1) + y^n(x^n + 1) = a \\ x^{3n} + y^{3n} = b \end{cases}$$

I. MURAROIU

Prima ecuație se poate scri:

$$x^{2n} + y^{2n} + 2x^n y^n + x^n + y^n =$$
$$= (x^n + y^n)^2 + x^n + y^n = a$$

Sistemul dat se reduce, la următorul:

$$(1) \qquad \begin{cases} (x^n + y^n)^2 + (x^n + y^n) - a = 0 \\ (x^n + y^n)\left[(x^n + y^n)^2 - 3x^n y^n\right] = b \end{cases}$$

Din prima ecuație din (1), deducem:

$$(2) \qquad x^n + y^n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} = A$$

Ecuația a 2-a din (1), ținând seamă de (2), devine

$$A^2 - 3x^n y^n = \frac{b}{A}$$

$$(3) \quad *** \qquad x^n y^n = \frac{A^3 - b}{3A.}$$

Ecuațiile (2) și (3) scriu suma și produsul lui x^n, y^n, deci putem forma ecuația:

$$z^2 - Az + \frac{A^3 - b}{3A} = 0,$$

sau:

$$(4) \qquad 3Az^2 - 3A^2 z + A^3 - b = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt x^n și y^n.

Deducem, deci:

$$x^n = \frac{3A^2 + \sqrt{3A(4b - A^3)}}{6A} = B,$$

$$y^n = \frac{3A^2 - \sqrt{3A(4b - A^3)}}{6A} = B_1$$

și:

$$x^n = B_1, \quad y^n = B$$

De aci deducem:

$$(5) \begin{cases} x = \sqrt[n]{B}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \\ y = \sqrt[n]{B_1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \end{cases} \quad (k = 0,1,2,..n-1)$$

Alt sistem de soluții este analog cu (5) schimbând B cu B_1.

Vom observa încă că în expresiile lui B și B_1, numărul A se va înlocui prin:

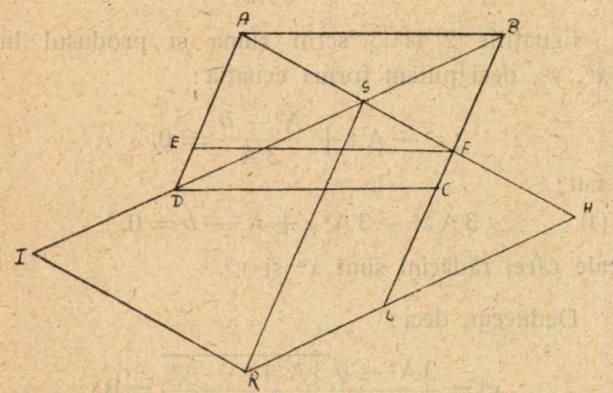
$$A = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} \end{cases}$$

Soluții date de d-nii *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București) și *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Marsieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara) și *Mihăileanu N. Nicolae* (Lic. Constanța).

868. — *Se dă paralelogramul* A B C D. *Dintr'un punct* E *de pe* A D *se duce o paralelă la* A B, *care taie pe* B C *în* F. *Dreptele* A F *şi* B D *se intersectează în* G. *Se prelungeşte* G F *cu* F H = A G *şi* G D *se prelungeşte cu* D I = B G. *Se construeşte apoi paralelogramul* I G H K. *Să se dovedească că diagonala* G K *este paralelă cu* B C *şi că avem:*

$$GK = AE + BC$$

V ALACI



Prelungim pe B C până întâlneşte pe H K în L. Triunghiurile A G D şi F H L sunt egale având: A G = F H prin construcţie, $\sphericalangle A = \sphericalangle F$ şi $\sphericalangle G = \sphericalangle H$, ca având respectiv laturile paralele. De aci rezultă:

(1) $\qquad LH = DG$ şi $FL = AD$

Apoi observăm că:

(2) $\qquad KH = IG = DB$

Scăzând (1) din (2), găsim:

$$KL = GB,$$

şi fiind şi paralele, urmează că:

$$GK \parallel BC$$

Deducem încă uşor urmărind figura:

$$GK = BL = BF + FL = AE + AD = AE + BC$$

Observare. Problema este sub o altă formă cuprinsul Notei No. 24, din „R. M. T." a autorului problemei, ceeace a fost observat de unii corespondenţi. Aceasta a fost şi scopul propunătorului.

Soluţii bune de D-şoara *Moraru P. Ecaterina* şi d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit., Iaşi), *Antonescu Aurel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Băcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Boerescu P. George* (Lic. Oltenita), *Bugeanu C.* (Lic. Timişoara), *Bujoreanu Vicenţiu* (Lic. Şincai, Bucureşti), *Chirilă V. Gheorghe* (Lic. Milit., Iaşi), *Vladimir I. Crivăţ* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Firoiu Ioan* (Lic. Arad), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (Lic. Oltenita), *Ioanitescu Gh. D-tru* (Lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Aurel* (Lic. Milit., Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Ionescu C. Iulian* (Lic. Milit., Iaşi), *Leibovici M.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Lucian I. David* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihăileanu Nicolae* (Lic. Constanţa), *Motoc D. M.* (Lic. Oltenita), *Paliţa C-tin* (Lic. Milit., Iaşi), *Patron Mihail* (Lic. Milit., Iaşi), *Pop Leontin* (Oradea), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Popovici Gh. Valentin* (Lic. Câmpina), *Purdilă Anton* (Lic. Braşov), *Schneier Th.* (Lic. Naţional Iaşi), *Saur Ion* (Sc. Polit., Timişoara), *Stefănescu Anibal* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Tutoveanu Valeriu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Vasiliu Ion, Vâlceanu N. Iustin* (Şc. Polit., Timişoara), *Velicescu Gh. Titu* (Lic Matei Basarab, Bucureşti) şi *Zamfir D-tru* (Lic. Buzeşti, Craiova).

A mai trimes soluţie d-l *Marineanu Traian* (stud. Bucureşti).

870. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum (x+1)(z-y)[(y+z)^2 - x^2] = 2(x-y)(y-z)(x+y+z)$$

CEZAR COSNITA

Observăm că:

$$(x+1)(z-y)[(y+z)^2 - x^2] =$$
$$= (x+y+z)(y+z-x)(xz - xy + z - y)$$
$$= (x+y+z)(-xy^2 - y^2 + xz^2 + z^2 - x^2 z + x^2 y - xz + xy)$$

Rezultă de aci că putem scri succesiv:

$$\sum (x+1)(z-y)[(y+z)^2 - x^2] = (x+y+z)$$
$$\sum (x^2 y - xy^2 + xz^2 - x^2 z + z^2 - y^2 + xy - xz)$$
$$= (x+y+z)(x^2 y - xy^2 + xz^2 - x^2 z + z^2 - y^2 + xy - xz + y^2 z - yz^2 + yx^2 - y^2 x + x^2 - z^2 + yz - yx + z^2 x - zx^2 + zy^2 - z^2 y + y^2 - x^2 + zx - zy)$$
$$= (x+y+z)(2x^2 y - 2xy^2 + 2xz^2 - 2x^2 z + 2y^2 z - 2yz^2)$$
$$= 2(x+y+z)[xy(x-y) + z^2(x-y) - z(x^2 - y^2)]$$
$$= 2(x+y+z)(x-y)[xy + z^2 - z(x+y)]$$
$$= 2(x+y+z)(x-y)[x(y-z) - z(y-z)] =$$
$$= 2(x+y+z)(x-y)(y-z)(x-z)$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluţii date de d-şoara *Moraru P. Ecaterina* (Lic. Calafat) şi de d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit., Iaşi), *Băcicov Boris* (bacalaureat, Tighina) *Bugeanu C.* (Lic. Timişoara), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Lucian I. David* (Şc. Polit., Timişoara), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşeiu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Millea G. Ene, Negrea A., Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Paliţa C-tin* (Lic. Milit., Iaşi), *Patron Mihai* (Lic. Milit., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chişinău), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Tutoveanu Valeriu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit., Timişoara), şi *Velicescu S. Titu* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

Soluţia autorului şi altele analoage date de d-nii: *Dimitriu Al. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti) şi *Lucian I. David* (Şc. Polit., Timişoara).

Considerăm determinatul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 - x^2 & (z+x)^2 - y^2 & (y+x)^2 - z^2 \\ yz - x & zx - y & xy - z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dezvoltându-l după elementele primei linii obţinem primul membru al identităţii.

Scăzând elementele liniei întâia din elementele celorlalte coloane, avem succesiv:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(x-y)(x+y+z) & 2(x-z)(x+y+z) \\ (x-y)(z+1) & (x-z)(y+1) \end{vmatrix}$$

$$= 2(x-y)(x-z)(x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z+1 & y+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)$$

Egalând aceste două desvoltări, avem identitatea cerută.

871. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \times 3^{4x+2} \\ 3 \times 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}} \end{cases}$$

ION C. CRISTESCU

Observând că:

$$27 = 3^3, \quad 243 = 3^5, \quad 81 = 3^4,$$

sistemul dat se mai poate scri:

$$\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7} \\ 3^{x+y+1} = 3^{4x-2} \end{cases}$$

Aceste ecuaţii sunt satisfăcute, numai dacă exponenţii lor sunt egali, rezultă deci:

$$\begin{cases} 6y - 3 = 4x + 7 \\ x + y + 1 = 4x - 2 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} 3y - 2x = 5 \\ y - 3x = -3 \end{cases}$$

Inmulţând cu -3 ecuaţia a 2-a şi scăzând din prima, avem:

$$7x = 14.$$

Rezulta deci:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3, \end{cases}$$

sistemul de soluţii.

Soluţii date de d-şoara *Moraru P. Ecaterina* (Lic. Calafat) şi de d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit, Iaşi), *Băcicov P. B.* (bacalaureat, Tighina), *Bujoreanu Vicenţiu* (Lic. Şincai, Bucureşti), *Chirilă Gheorghe* (Lic. Milit., Iaşi), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Firoiu Ioan* (Lic. Arad), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ioanitescu Gh. D-tru* (Lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Aurel* (Lic. Milit., Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Ionescu C. Iulian* (Lic. Milit., Iaşi), *Iotta D. Manoil* (Şc. Polit, Timişoara), *Lucian I. David* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşeiu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu Nicolae* (Lic. Constanţa), *Millea G. Ene, Negoescu A. Ioan* (Lic. Milit., Iaşi), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Oelze Emil* (Şc. Polit, Timişoara) *Paliţa C-tin* (Lic. Milit., Iaşi), *Patron M.* (Lic. Milit., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă Anton* (Lic. Braşov), *Russu C-tin* (Constanţa), *Saur Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chişinău) *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Tutoreanu Valeriu* (Şc. Polit.. Timişoara), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), şi *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit., Timişoara).

Observare. D-l *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), a soluţionat următorul sistem mai general:

$$\begin{cases} 27^{a_1 y - b_1} = 243^{b_2} \times 3^{a_2 x + b_2} \\ 3^{b_4} \times 3^{a_3 x + a_4 y} = \sqrt{81^{a_5 x - b_5}} \end{cases}$$

S'au primit şi câteva soluţiuni greşite.

873. — *Se cer patratele perfecte abcada în care ac şi ba sunt patrate perfecte.*

GEORGE P. BOERESCU

ac fiind patrat perfect şi a terminaţie de patrat perfect, poata fi:

16, 49, 64.

Atunci pentru $b\,a$, rezultă:

01, 81; 04, 64; 16, 36

Rezultă de aci pentru a, b, c următoarele valori:

a	1	1	4	4	6	6
b	0	8	0	6	1	3
c	6	6	9	9	4	4

Patratul perfect cerut este deci de forma:

$1061\,d\,1$, $1861\,d\,1$, $4094\,d\,4$, $4694\,d\,4$,

$6146\,d\,6$, $6346\,d\,7$

Extragând rădăcina patrată a acestor numere, găsim că singurul patrat în condițiile problemei, este:

$$614656 = 784^2$$

Soluții date de d-nii: *Băcicov B.* (bacalaureat, Tighina), *Bugeanu C.* (Lic. Timișoara), *Chirilă V. Gheorghe* (Lic. Milit., Iași), *Costăchescu C. C-tin* (Lic. Milit, Iași), *Crivăț I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, București), *Cuciureanu Șt.* (Lic. Mitit, Iași), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Grecu M. Cristache* (Lic. Oltenița), *Ionascu C. Iulian* (Lic. Milit, Iași), *Leibovici M.* (Lic. Național, Iași), *Lucian I. David* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupescu C-tin*, *Marineanu Traian* (student, București), *Marișieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emil* (Șc. Polit., București), *Motoc M.* (Lic. Oltenița), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Patron M.* (Lic. Milit., Iași), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenița), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chișănău), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iași), *Tutoveanu Valeriu* (Șc. Polit., București) și *Ungheanu I. Mihail* (Lic. Oltenița).

PROBLEME PROPUSE

905. — La adunarea mai multor numere se omite o cifră dintr'o coloană și se obține rezultatul 2534972. La probă se adună acea cifră însă se omiie o alta din altă coloană și se obține 2528872. Care este rezultatul exact al adunării?

ION PROTOPOPESCU

906. — Să se găsească numărul întreg P format din numărul $N+1$ scris după N știind că P^2 se obține scriind pe $(N+1)^2$ după produsul $N(N+1)$.

COL. GH. BUICLIU

907. — Intr'un patrulater oarecare, diagonalele AC și BD care se intersectează în O formează triunghiurile AOD, DOC, COB, BOA. Fie (a_1, b_1) proecțiile punctului O pe bisectoarele interioare ale unghiurilor A și D din triunghiul AOD. La fel se obțin în celelalte triunghiuri perechile de puncte (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4). Patrulaterul format prin intersecția dreptelor $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$, $a_3\,b_3$, $a_4\,b_4$ este un patrulater asemenea cu ABCD și de patru ori mai mic.

VLADIMIR I. CRIVETZ

908. Din vârfurile patrulaterului ABCD, se duc segmentele AA′, BB′, CC′, DD′ paralele și egale respectiv cu BC, CD, DA, AB. Se mai duc din aceleași vârfuri segmentele AA″, BB″, CC″, DD″ paralele și egale respectiv cu CD, DA, AB, BC. Să se arate că dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse în patrulaterele ABCD, A′B′C′D′, A″B″C″D″, sunt concurente.

ION MARGINEANU

909. Dacă $x+y+z=0$, expresia:

$$E.=\Sigma(x^2+yz+1)(z^2-y^2),$$

este nulă.

CEZAR COSNITA

910. C_n^i fiind simbolul combinărilor de n obiecte luate câte i, să se stabilească identitățile:

$$\sum_{i=0}^{k} C_{n+1}^i - C_n^k = 2\sum_{i=0}^{k} C_n^{i-1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} C_{2m-1}^{m-1} + C_{2m-k}^{m} = \sum_{i=0}^{m} (C_m^i)^2$$

I. MURAROIU

911. Fiind dat:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{a},$$

se cere să se stabilească identitatea:

$$a^3 \sin mx + 3a^2 m \sin\left(mx+\frac{\pi}{2}\right) + 3am^2 \sin(mx+\pi) + m^3 \sin\left(mx+\frac{3\pi}{2}\right) = (a^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \sin(mx+3\varphi).$$

Să se verifice în cazul particular, $a=m=1$.

V. ALACI

912. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{cotg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{cotg}^4 x}{\operatorname{tg}^4 x-\operatorname{cotg}^4 x} = 2$$

GHEORGHE CHIRILA

INFORMAȚIUNI

Luăm cu durere cunoștință de pierderea distinsului nostru colaborator, profesor *Traian A. Dordea*, de la liceul din *Oltenița*.

Regretatul profesor a lucrat cu hărnicie și pricepere pentru a crea la liceul din *Oltenița*, o atmosferă matematică prielnică și înălțătoare, care a încălzit mintea și inimile multor din elevi săi, corespondenți distinși ai „R. M. T.".

Exprimăm familiei pe această cale, regretele noastre profunde.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 IUNIE 1930 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. HARALAMB P. IONESCU RELATIUNI TRIGONOMETRICE
2. NOTE MATEMATICE: 10, 11
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 835, 864, 872, 875, 876, 877
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea să anunţăm că mai face parte din Comitetul Revistei şi d-l **Emil Mihaiu,** profesor la Şcoala Comercială din Timişoara şi Actuar Matematic diplomat.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

RELAȚIUNI TRIGONOMETRICE

de HARALAMB P. IONESCU

Servindu-mă de cunoscuta propietate a egalităților, că dacă inmulțim ambii membri cu o cantitate oare care egalitatea nu se schimbă, îmi propun ca pe o cale foarte scurtă și elementară și pornind de la relațiuni evidente între elementele unui triunghiu să stabilesc noi relațiuni atât prin deducere cât și prin comparația a două sau mai multe relații cari se vor stabili.

1°. Se știe că avem evident:

$$i_a + r_a = 2R + r \quad , \quad i_b + r_b = 2R + r \quad ,$$
$$i_c + r_c = 2R + r \quad ,$$

unde i_a, i_b, i_c, sunt porțiunile de innălțimi cuprinse intre vârf și ortocentru.

Inmulțind relațiunile de mai sus respectiv cu:

$$i_a - r_a \quad , \quad i_b - r_b \quad , \quad i_c - r_c$$

avem:

$$r_a(2R + r - r_a) = i_a(2R + r - i_a),$$
$$r_b(2R + r - r_b) = i_b(2R + r - i_a),$$
$$r_c(2R + r - r_c) = i_c(2R + r - i_c),$$

sau:

$$(1) \qquad \sum \frac{2R + r - r_a}{2R + r - i_a} = \frac{i_a}{r_a} + \frac{i_b}{r_b} + \frac{i_c}{r_c}.$$

Ținând însă seamă că avem:

$$i_a = a \operatorname{cotg} A \quad , \quad i_b = b \operatorname{cotg} B \quad , \quad i_c = c \operatorname{cotg} C$$

și

$$r_a = \frac{p}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}} \quad , \quad r_b = \frac{p}{\operatorname{cotg} \frac{B}{2}} \quad , \quad r_c = \frac{p}{\operatorname{cotg} \frac{C}{2}}$$

avem evident:

$$\frac{i_a}{r_a} + \frac{i_b}{r_b} + \frac{i_c}{r_c} = \frac{1}{p} \sum a \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \quad ,$$

sau:

$$(2) \qquad p\left[\frac{2R + r - r_a}{2R + r - i_a} + \frac{2R + r - r_b}{2R + r - i_b} + \right.$$
$$\left. + \frac{2R + r - r_c}{2R + r - i_c}\right] = \sum a \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

Relațiunile din 1° se mai pot scrie:

$$i_a - r = 2R - r_a \quad , \quad i_b - r = 2R - r_b \quad ,$$
$$i_c - r = 2R - r_c \quad ,$$

și inmulțindu-le respectiv pe fiecare cu:

$$2R + r_a \quad , \quad 2R + r_b \quad , \quad 2R + r_c \quad ,$$

avem:

$$2R(i_a - r - 2R) = r_a(r - r_a - i_a),$$
$$2R(i_b - r - 2R) = r_b(r - r_a - i_a),$$
$$2R(i_c - r - 2R) = r_c(r - r_a - i_a),$$

sau:

$$(3) \qquad \frac{i_a - r - 2R}{r - r_a - i_a} + \frac{i_b - r - 2R}{r - r_b - i_b} +$$
$$+ \frac{i_c - r - 2R}{r - r_c - i_c} = \frac{1}{2R}\left[r_a + r_b + r_c\right],$$

știind că:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \quad , \quad r_b = p \operatorname{tg} \frac{B}{2} \quad , \quad r_c = p \operatorname{tg} \frac{C}{2} \quad ,$$

avem:

$$(4) \qquad \frac{i_a - r - 2R}{r - r_a - i_a} + \frac{i_b - r - 2R}{r - r_b - i_a} +$$
$$+ \frac{i_c - r - 2R}{r - r_c - i_c} = \frac{p}{2R}\left[\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right]$$

2°. Considerând relaţiunile cunoscute:

$$ab = rr_c + r_a r_b \quad , \quad bc = rr_a + r_b r_c \quad ,$$

$$ac = rr_b + r_a r_c \quad ,$$

pe cari le inmulţim respectiv cu:

$$rr_a - r_b r_c \quad , \quad rr_b - r_c r_a \quad , \quad rr_c - r_a r_b$$

avem adunând:

$$(5) \quad \frac{r_a r_b - ab}{rr_c - ab} + \frac{r_b r_c - bc}{rr_a - bc} + \frac{r_c r_a - ca}{rr_b - ca} = r\left[\frac{r_c}{r_a r_b} + \frac{r_a}{r_b r_c} + \frac{r_b}{r_a r_c}\right]$$

Ştiind însă că avem:

$$\frac{r_a}{r_b r_c} = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} \quad , \quad \frac{r_b}{r_c r_a} = \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} \quad , \quad \frac{r_c}{r_a r_b} = \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}$$

avem:

$$(6) \quad \frac{1}{r}\left(\frac{r_a r_b - ab}{rr_c - ab} + \frac{r_b r_c - bc}{rr_a - bc} + \frac{r_c r_a - ca}{rr_b - ca}\right) = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}.$$

3°. Se ştie că avem evident:

$$4R\cos^2\frac{A}{2} = r_b + r_c \quad , \quad 4R\cos^2\frac{B}{2} = r_c + r_a \quad ,$$

$$4R\cos^2\frac{C}{2} = r_a + r_b \quad ,$$

pe cari dacă le inmulţim respectiv cu:

$$r_b - r_c \quad , \quad r_c - r_a \quad , \quad r_a - r_b \quad ,$$

avem evident, adunând:

$$(8) \quad \frac{4R\cos^2\frac{A}{2} - r_b}{4R\cos^2\frac{A}{2} - r_c} + \frac{4R\cos^2\frac{B}{2} - r_c}{4R\cos^2\frac{B}{2} - r_a} + \frac{4R\cos^2\frac{C}{2} - r_a}{4R\cos^2\frac{C}{2} - r_b} = \frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a}$$

dar

$$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2} \quad , \quad r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2} \quad , \quad r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2} \quad ,$$

deci avem:

$$\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_a} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

$$\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

dar:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p} \quad ,$$

deci:

$$(9) \quad r\left[\frac{4R\cos^2\frac{A}{2} - r_b}{4R\cos^2\frac{A}{2} - r_c} + \frac{4R\cos^2\frac{B}{2} - r_c}{4R\cos^2\frac{B}{2} - r_a} + \frac{4R\cos^2\frac{C}{2} - r_a}{4R\cos^2\frac{C}{2} - r_b}\right] = p\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$$

Dacă comparăm această egalitate cu egalităţile: (6) şi (4) avem egalitatea evidentă:

$$(10) \quad 2R\sum\frac{(r_a r_b - ab).(i_a - r - 2R)}{(rr_c - ab).(r - r_a - i_a)} = r^2\sum\frac{4R\cos^2\frac{A}{2} - r_b}{4R\cos^2\frac{A}{2} - r_c}$$

4°. Dacă relaţiunile cunoscute:

$$a^2 + i_a^2 = 4R^2 \quad , \quad b^2 + i_b^2 = 4R^2 \quad , \quad c^2 + i_c^2 = 4R^2,$$

le inmulţim pe fiecare cu:

$$a^2 - i_a^2 \quad , \quad b^2 - i_b^2 \quad , \quad c^2 - i_c^2,$$

avem adunând:

$$(11) \quad \frac{i_a^2 - 4R^2}{a^2 - 4R^2} + \frac{i_b^2 - 4R^2}{b^2 - 4R^2} + \frac{i_c^2 - 4R^2}{c^2 - 4R^2} = \sum\frac{a^2}{i_a^2},$$

ştiind însă că avem:

$$i_a = 2R\cos A \quad , \quad i_b = 2R\cos B \quad , \quad i_c = 2R\cos C$$

şi

$$a = \frac{4SR}{bc} \quad , \quad b = \frac{4SR}{ac} \quad , \quad c = \frac{4SR}{ab},$$

avem evident:

(12) $$\sum \frac{i_a^2 - 4R^2}{a^2 - 4R^2} = \sum \frac{\cos^2 A - 1}{\frac{4S^2}{b^2 c^2} - 1} = -$$

$$\sum \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{4S^2 - b^2 c^2}$$

dar:

$$b c \sin A = c a \sin B = a b \sin C = 2S$$

deci avem:

$$-\sum \frac{\sin^2 A \cdot b^2 c^2}{4S^2 - b^2 c^2} = -4S^2 \sum \frac{1}{4S^2 - b^2 c^2}$$

sau:

(13) $$\frac{a^2}{i_a^2} + \frac{b^2}{i_b^2} + \frac{c^2}{i_c^2} = -4S^2 \left[\frac{1}{4S^2 - b^2 c^2} + \frac{1}{4S^2 - c^2 a^2} + \frac{1}{4S^2 - a^2 b^2}\right].$$

Am văzut mai sus că avem:

$$\frac{a^2}{i_a^2} = \frac{-4S^2}{4S^2 - b^2 c^2}$$

de unde reese că:

$$4S^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 - i_a^2}$$

sau:

(14) $$12S^2 = a^2 b^2 c^2 \left[\frac{1}{a^2 - i_a^2} + \frac{1}{b^2 - i_b^2} + \frac{1}{c^2 - i_c^2}\right]$$

dar:

$$a b c = 4SR$$

deci avem evident:

(15) $$\frac{1}{a^2 - i_a^2} + \frac{1}{b^2 - i_b^2} + \frac{1}{c^2 - i_c^2} = \frac{3}{4R^2}.$$

Dacă în relația (13) ținem seamă că:

$$4S^2 = b^2 c^2 \sin A = c^2 a^2 \sin^2 B = a^2 b^2 \sin^2 C$$

avem:

$$\sum \frac{a^2}{i_a^2} = -4S^2 \sum \frac{1}{b^2 c^2 (\sin^2 A - 1)}$$

sau:

(16) $$\frac{\frac{a^2}{i_a^2} + \frac{b^2}{i_b^2} + \frac{c^2}{i_c^2}}{\frac{\sec^2 A}{b^2 c^2} + \frac{\sec^2 B}{c^2 a^2} + \frac{\sec^2 C}{a^2 b^2}} = 4S^2$$

5°. Avem relațiunea foarte cunoscută:

$$r(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) = h_a h_b h_c,$$

care inmulțită pe rând cu:

$$h_a h_b - (h_b h_c + h_c h_a),$$

$$h_b h_c - (h_c h_a + h_a h_b),$$

$$h_c h_a - (h_a h_b + h_b h_c),$$

ne dă adunând:

(17) $$\sum \frac{h_a h_b - r(h_a + h_b)}{h_c - r}(h_a + h_b) =$$

$$\frac{h_a^2 h_b^2}{h_c^2} + \frac{h_b^2 h_c^2}{h_a^2} + \frac{h_c^2 h_a^2}{h_b^2}$$

Dar se știe că:

(α) $$a h_a = b h_b = c h_c = 2S$$

și:

$$2S = \frac{a b c}{2R}.$$

Deci avem:

$$\frac{h_a^2 h_b^2}{h_c^2} = \frac{4S^2 c^2}{a^2 b^2} = \frac{\frac{a^2 b^2 c^2}{4R^2}}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{4R^2}$$

sau adunând:

$$\frac{h_a^2 h_b^2}{h_c^2} + \frac{h_b^2 h_c^2}{h_a^2} + \frac{h_c^2 h_a^2}{h_b^2} = \frac{1}{4R^2}(a^4 + b^4 + c^4)$$

sau:

(18) $$4R^2 \sum \frac{h_a h_b - r(h_a + h_b)}{h_c - r}(h_a + h_b) = a^4 + b^4 + c^4$$

Tot de la relațiuni de la care am plecat în 5° putem prin aceeaș metodă obține:

(19) $$\sum \frac{h_a h_b - r(h_a + h_b)}{h_c - r} = \frac{h_a h_b}{h_c(h_a + h_b)} +$$

$$\frac{h_b h_c}{h_a(h_b + h_c)} + \frac{h_c h_a}{h_b(h_c + h_a)}$$

și ținând seamă de relațiile din (α) avem:

$$\frac{h_a^2 h_b^2}{h_c^2(h_a + h_b)} = \frac{2S c^2}{a^2 b^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} =$$

$$= \frac{2S c^2}{a b (a + b)} = \frac{c^3}{2R(a + b)}$$

sau:

$$\frac{h_a^2 h_b^2}{h_c^2(h_a+h_b)}+\frac{h_b^2 h_c^2}{h_a^2(h_b+h_c)}+\frac{h_c^2 h_a^2}{h_b^2(h_c+h_a)}=$$

$$=\frac{1}{2R}\left[\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\right]$$

sau:

$$(20)\qquad 2R\sum\frac{h_a h_b-r(h_a+h_b)}{h_c-r}=\frac{a^3}{b+c}+$$

$$\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}$$

Dacă o comparăm pe această relațiune cu egalitatea (18) avem evident:

$$(21)\qquad \frac{1}{2R}\left[\frac{a}{h_a+h_b}+\frac{b}{h_a+h_c}+\frac{c}{h_b+h_a}\right]=$$

$$=\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}$$

Tot prin aceleaș lucrări pornind dela relația cunoscută:

$$r(r_a r_b+r_b r_c+r_c r_a)=r_a r_b r_c$$

avem:

$$\sum\frac{r_a r_b-r(r_a+r_a)}{r_c-r}(r_a+r_b)=\sum\frac{r_a^2 r_b^2}{r_c^2}$$

și

$$\sum\frac{r_a r_b-r(r_a+r_b)}{r_c-r}(=\sum\frac{r_a^2 r_b^2}{r_c^2(r_a+r_b)},$$

știind însă că avem:

$$r_a=r\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}\quad,\quad r_b=r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2},$$

$$r_c=r\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

avem:

$$\frac{r_a^2 r_b^2}{r_c^2}+\frac{r_b^2 r_c^2}{r_a^2}+\frac{r_c^2 r_a^2}{r_b^2}=r^2\left[\operatorname{cotg}^4\frac{A}{2}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{cotg}^4\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^4\frac{C}{2}\right]$$

sau:

$$(22)\qquad \sum\frac{r_a r_b-r(r_a+r_b)}{r_c-r}(r_a+r_b)=$$

$$r^2\left[\operatorname{cotg}^4\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}^4\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}^4\frac{C}{2}\right]$$

Ținând seamă de aceleaș relații ca mai sus avem:

$$\frac{r_a^2 r_b^2}{r_c^2(r_a+r_b)}+\frac{r_b^2 r_c^2}{r_a^2(r_b+r_c)}+\frac{r_c^2 r_a^2}{r_b^2(r_c+r_a)}=$$

$$r\left[\frac{\operatorname{cotg}^3\frac{A}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}+\frac{\operatorname{cotg}^3\frac{B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}+\right.$$

$$\left.\frac{\operatorname{cotg}^3\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}\right]$$

sau:

$$(23)\qquad \sum\frac{r_a r_b-r(r_a+r_b)}{r_c-r}=r\left[\frac{\operatorname{cotg}^3\frac{A}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}+\right.$$

$$\left.\frac{\operatorname{cotg}^3\frac{B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}+\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}+\frac{\operatorname{cotg}^3\frac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}\right]$$

Tot astfel putem stabili și alte foarte multe relațiuni trigonometrice.

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra problemei 819.*

In această notă, îmi propun să rezolv un caz mai general al problemei 819, rezolvată în No. 9 al revistei.

Să considerăm suma

$$S=a\,r\,a+b\,r\,r\,b+c\,r\,r\,r\,c+\ldots\ldots+m\,r\,r\ldots r\,m$$

unde să avem

$$b=a+1\,;\,c=a+2\,;\ldots\ldots;+m=a+n$$

Suma dată se poate scrie sub forma

$$S=[(10^2+1)a+10\,r]+[(10^3+1)b+(10^2+$$

$$+10)r]+[(10^4+1)c+(10^3+10^2+10)r]+$$

$$+\ldots\ldots+[(10^{n+1}+1)m+(10^n+10^{n-1}+\ldots+10)r]$$

din care avem

$$S_1 = 10r + (10^2 + 10)r + (10^3 + 10^2 + 10)r \ldots + \\ + (10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10)r$$

$$S_2 = [10^2 + 1)a + (10^3 + 1)b + (10^4 + 1)b + \ldots + \\ + (10^{n-1} + 1)m$$

Efectuăm pe fiecare din aceste sume și avem:

$$S_1 = r\left[\frac{10^2 - 10}{10 - 1} + \frac{10^3 - 10}{10 - 1} + \ldots\ldots + \right.$$

$$\left. \frac{10^{n+1} - 10}{10 - 1}\right] = r\left[\frac{(10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{n+1}) - 10n}{9}\right]$$

$$S_1 = r\left[\frac{10^{n+2} - 10^3 - 9n \cdot 10}{81}\right]$$

In suma S_2 inlocuim pe $b, c, \ldots, m$ cu valorile lor de mai sus și avem:

$$S_2 = 10^2 a + 10^3 (a + 1) + 10^4 (a + 2) + \ldots + \\ + 10^{n+1} (a + n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)a$$

Această sumă se subîmparte în următoarele sume:

$$S_3 = [10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^{n+1}]a \\ = a\frac{10^{n+2} - 10^2}{10 - 1}$$

$$S_4 = 10^3 + 10^4 + \ldots\ldots + 10^{n+1} = \frac{10^{n+2} - 10^3}{10 - 1}$$

$$S_5 = 10^4 + \ldots\ldots + 10^{n+1} = \frac{10^{n+2} - 10^4}{10 - 1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$S_n = 10^{n+1} = \frac{10^{n+2} - 10^{n+1}}{10 - 1}$$

$$S_t = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)a = \frac{n(n+1)}{2}a$$

De unde

$$S_2 = a\frac{10^{n+2} - 10^2}{10 - 1} + \frac{10^{n+2} - 10^3}{10 - 1} + \\ \frac{10^{n+2} - 10^4}{10 - 1} + \ldots + \frac{10^{n+2} - 10^{n+1}}{10 - 1} + a\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad S_2 = a\frac{10^{n+2} - 10^2}{10 - 1} + \\ + \frac{9(n-1)10^{n+2} - (10^{n+2} - 10^3)}{81} + a\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad S_2 = a\left[\frac{10^{n+2} - 10^2}{9} + \frac{n(n+1)}{2}\right] + \\ + \frac{9(n-1)10^{n+2} - (10^{n+2} - 10^3)}{81}$$

Adunând sumele S_1 și S_2 avem

$$S = a\left[\frac{10^{n+2} - 10^2}{9} + \frac{n(n+1)}{2}\right] + \\ + \frac{9(n-1)10^{n+2} - (10^{n+2} - 10^3)}{81} + \\ + r\left[\frac{10^{n+2} - 10^3 - 9n \cdot 10}{81}\right]$$

Dacă inlocuim pe $a = 1$, și $r = 0$, avem soluția problemei 819.

ION GH POPA

11. *Elementele unui triunghiu în funcție de razele cercurilor exînscrise.*

In cele ce urmează voi căuta să exprim elementele unui triunghi în funcție de razele cercurilor exînscrise lui. Bazându-ne pe relații astfel stabilite se pot deduce diferite relații remarcabile între elementele triunghiului.

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$

Fie r_a, r_b, r_c razele cercurilor exînscrise triunghiului A B C.

Mai întâi calculăm raza cercului înscris, căci aceasta ne va ajuta la calculul celorlalte elemente. Se știe relația:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

de aici deducem:

$$(1) \quad r = \frac{r_a r_b r_c}{r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c} \text{ sau: } r = \frac{r_a r_b r_c}{\Sigma r_a r_b}$$

Se cunosc apoi relațiile:

$$(p - a)(p - b) = r \cdot r_c \,;\; (p - b)(p - c) = r \cdot r_a \,;$$

$$(p - a)(p - c) = r \cdot r_b \,;$$

Dacă în aceste relații punem:

$$p - a = x \,;\; p - b = y \,;\; p - c = z,$$

atunci obținem următorul sistem;

$$\begin{cases} x \cdot y = r \cdot r_c \\ y \cdot z = r \cdot r_a \\ z \cdot x = r \cdot r_b \end{cases}$$

In acest sistem împărțind ecuația întâia prin a doua și a doua prin a treia, obținem:

$$\frac{x}{z} = \frac{r_c}{r_a}; \frac{y}{z} = \frac{r_a}{r_b}; \text{ de unde } z = \frac{r_a \cdot x}{r_c}; y = \frac{r_a \cdot x}{r_b}$$

Inlocuind în a doua avem:

$$\frac{r_a^2 x^2}{r_b r_c} = r \cdot r_a$$

Simplificând și ținând seamă de (1), avem:

$$(2) \qquad x = \frac{r_b r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} \text{ sau: } p - a = \frac{r_b r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

analog deducem:

$$(3) \quad p - b = \frac{r_a r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} \qquad (4) \quad p - c = \frac{r_a r_b}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Din relațiile (2) (3) și (4) deducem, ținând seamă că:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\begin{cases} -a + b + c = \dfrac{2 r_b r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} \\ a - b + c = \dfrac{2 r_a r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} \\ a + b - c = \dfrac{2 r_a r_b}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} \end{cases}$$

Adunând ecuația întâia cu a doua obținem:

$$(5) \qquad c = \frac{r_c (r_a + r_b)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Analog se deduc și celelalte laturi:

$$(6) \quad a = \frac{r_a (r_b + r_c)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} \text{ și } (7) \quad b = \frac{r_b (r_a + r_c)}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Semiperimetrul se deduce ușor și avem:

$$(8) \qquad p = \frac{2 (r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c)}{2 \sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

$$= \frac{\Sigma r_a r_b}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}} = \sqrt{\Sigma r_a r_b}$$

Suprafața se deduce din:

$$(9) \qquad S = \frac{r_a r_b r_c}{p} = \frac{r_a r_b r_c}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Inălțimile se deduc din:

$$\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a}$$

și analoagele:

$$(10) \quad h_a = \frac{2 r_b r_c}{r_b + r_c} \qquad (11) \quad h_b = \frac{2 r_a r_c}{r_a + r_c}$$

$$(12) \qquad h_c = \frac{2 r_a r_b}{r_a + r_b}$$

Raza cercului circumscris se deduce din:

$$(13) \qquad R = \frac{a b c}{4 S} = \frac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c)}{4 \Sigma r_a r_b}$$

Sinusurile unghiurilor se deduc din:

$$(14) \qquad \sin A = \frac{a}{2 R} = \frac{2 r_a \sqrt{\Sigma r_a r_b}}{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}$$

și analoagele.

Cosinusurile sunt date de relația:

$$(15) \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 b c} = \frac{\Sigma r_a r_b - r_a^2}{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}$$

și analoagele.

Sinusurile jumătăților unghiurilor se deduc din:

$$(16) \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_a - r}{4 R}} = \frac{r_a}{\sqrt{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}}$$

Analog și pentru celelalte unghiuri.

Cosinusurile jumătăților unghiurilor:

$$(17) \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_b + r_c}{4 R}} = \sqrt{\frac{\Sigma r_a r_b}{(r_a + r_b)(r_a + r_c)}}$$

La fel pentru celelalte unghiuri.

Tangentele unghiurilor pe jumătate se deduc din:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{p} \text{ și analoagele.}$$

Astfel avem:

$$(18) \qquad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{\sqrt{\Sigma r_a r_b}}$$

Medianele se deduc din:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2 (b^2 + c^2) - a^2} \text{ etc...}$$

$$(19)\qquad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r_a^2(r_b - r_c)^2 + 4\,r_b\,r_c \cdot \Sigma\, r_a\, r_b}{\Sigma\, r_a\, r_b}}$$

Simedianele se deduc din:

$$S_a = \frac{b\,c}{b^2 + c^2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2} \quad \text{etc...}$$

Astfel avem:

$$(20)\qquad S_a = \frac{r_b\,r_c\,(r_a + r_c)\,(r_a + r_b)}{r_a^2\,(r_b^2 + r_c^2) + 2\,r_b\,r_c\,\Sigma\, r_a\, r_b} \cdot \sqrt{\frac{r_a^2(r_b - r_c)^2 + 4\,r_b\,r_c\,\Sigma\, r_a\, r_b}{\Sigma\, r_a\, r_b}}$$

Bisectoarele exterioare le deducem din formula:

$$I_a' = \frac{2}{b - c}\sqrt{(p - b)\,(p - c)\,b\,c}$$

şi analoagele:

$$(21)\qquad I_a' = \frac{2\,r_b\,r_c}{r_b - r_c} \times \sqrt{\frac{(r_a + r_b)\,(r_a + r_c)}{\Sigma\, r_a\, r_b}}$$

Bisectoarele interioare se deduc din formula:

$$I_a = \frac{2\sqrt{p\,(p - a)\,b\,.\,c}}{b + c}$$

şi analoagele:

$$(22)\qquad I_a = \frac{2\,r_b\,r_c\sqrt{(r_a + r_b)\,(r_a + r_c)}}{r_a\,(r_b + r_c) + 2\,r_b\,r_c}$$

Segmente de bisectoare, cari sunt cuprinse între vârfuri şi centrul cercului înscris, se deduc din formula:

$$J_a = \sqrt{\frac{b\,c\,(p - a)}{p}}$$

şi analoagele:

$$(23)\qquad J_a = \frac{r_b\,r_c}{\Sigma\, r_a\, r_b}\sqrt{(r_a + r_b)\,(r_a + r_c}$$

Segmentele de bisectoare cuprinse între centrul cercului înscris şi picioarele lor:

$$(24)\qquad J_a' = \frac{a}{b + c} \cdot \sqrt{\frac{b\,c\,(p - a)}{p}} =$$

$$= \frac{r_a\,r_b\,r_c\,(r_b + r_c)}{\Sigma\, r_a\, r_b\,(r_b\,r_c + \Sigma\, r_a\, r_b)} \cdot \sqrt{(r_a + r_b)\,(r_a + r_c)}$$

Segmentele de înălţimi cuprinse între ortocentru şi laturi:

$$(25)\qquad h_a'' = 2\,R\cos B\cos C = \frac{(\Sigma\, r_a\, r_b - r_b^2)\,(\Sigma\, r_a\, r_b - r_c^2)}{2\,\Sigma\, r_a\, r_b\,(r_b + r_c)}.$$

Distanţele dela vârfurile triunghiului la ortocentru:

$$(26)\qquad d_a = 2\,R\cos A = \frac{(r_b + r_c)\,(\Sigma\, r_a\, r_b - r_c^2)}{2\,\Sigma\, r_a\, r_b}.$$

Distanţele centrului cercului circumscris la laturi:

$$(27)\qquad k_a = R\cos A = \frac{(r_b + r_c)\,(\Sigma\, r_a\, r_b - r_a^2)}{4\,\Sigma\, r_a\, r_b}.$$

Unghiul lui *Brocard* se deduce din relaţia:

$$\cot\omega = \Sigma\cot A$$

(„Manuel de Trigonometrie par F. G. M.“)

$$(28)\qquad \cot\omega = \frac{(r_a\,r_b + r_b\,r_c + r_a\,r_c)^2 - r_a\,r_b\,r_c\,(r_a + r_b + r_c)}{2\,r_a\,r_b\,r_c\,(r_a\,r_b + r_b\,r_c + r_a\,r_c)}$$

Raza cercului înscris în triunghiul ortic se deduce din:

$$r' = 2\,R\cos A\cos B\cos C$$

$$(29)\qquad r' = \frac{(\Sigma\, r_a\, r_b - r_a^2)\,(\Sigma\, r_a\, r_b - r_b^2)\,(\Sigma\, r_a\, r_b - r_c^2)}{2\,\Sigma\, r_a\, r_b\,(r_a + r_b)\,(r_b + r_c)\,(r_a + r_c)}.$$

Procedând la fel, putem calcula şi celelalte elemente a unui triunghiu, precum şi distanţele dintre diferite puncte remarcabile dintr'un triunghiu, în funcţiune de razele cercurilor exînscrise.

Pornind dela relaţiile stabilite mai sus, putem deduce şi alte relaţiile remarcabile între elementele unui triunghiu.

BORIS BACICOV
(student)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 9, Mai 1930. Sur une propriété des points de *Brocard*, par *R. Goormaghtigh*. Asupra unei clase de curbe în spaţiu, de *Alexandru Niculescu*.

2. *Buletinul Societăţii de Ştiinţe din Cluj*, tome V, fasc. 2, *Mai 1930*. Sur les algébroides lieés algébriquement, par *Th. Varopoulos*. Remarque sur les fonctions holomorphes et les fonctions continues d'une variable complexe, par *D. Pompeiu*. Sur les zéros de certains polynomes, par *O. Onicescu*. Sur une nouvelle classe d'ammines, les Sélénocyonmmines, par *G. Spacu* et *C. G. Macarovici*. Sur la condition pour que $n + 2$ points soient situés sur une parabole du n^ième degré, par *Ernest Abason*. Con-

tribution à l'étude des sels hétérogènes complexe, par *G. Spacu* et *G. Suciu.* Contribution à la formation des ammines doubles en solution aqueuse, par *R. Ripan* et *L. Dima.* Sur un développement a priori, représentant une fonction monogène (α), par *Nicolas Théodoresco.* Sur les Cupro-Thiosulfates complexes d'ammonium de potassium et de sodium, par *G. Spacu* et *I. G. Murgulescu.* Un nouveau sophrochaeta de l'Olténie, par *R. Jeannel* et *J. de Mallász.* Coléoptères cavernicoles des Carpates méridionales, par *R. Jeanel.* Notes sur les copéprodes, par *P. A. Chappuis.*

3. *Georges Bouligand.* Notions sur la Géométrie Réglée, et sur la théorie du Complexe Quadratique. (Paris, librairie *Vuibert*, Boulevard Saint Germain, 63, 1929).

4. *D. Georgescu*, profesor. *Culegere de Probleme pentru bacalaureat și cursul superior de liceu.* (Cuprinde, 402 probleme cu soluțiile lor din care peste 300 au fost propuse la examenul de bacalaureat din Iunie și Septembrie 1929). Pitești, prețul 120 lei.

5. *Ing. Radu Criveanu* și *I. B. Florescu. Probleme de matematici pentru bacalaureat, după programa analitică actualmente în vigoare.*

6. *Radu Bădesco. Sur une équation fonctionelle.* (Académie royal de Belgique, séance de 1er Mars 1930, pp. 273—288, Bruxelles 1930).

PROBLEME REZOLVATE

835. *Se cer numerele de patru cifre $abcd$, astfel ca abc și abd să fie numere prime și $ad-ab$ să fie un cub perfect.*

IOAN GH. POPA

Condiția, $ad-ab=$ cub perfect, este echivalentă cu:

$$d-b=1, \qquad d-b=8.$$

Primul caz. Numerele $abcd$ în cazul $d-b=1$, ținând seamă că d este impar și $\neq 5$ fiind terminație de număr prim, pot fi de forma:

$$a0c1, \quad a2c3, \quad a6c7, \quad a8c9.$$

Pentru ca numerele $a0c1$ să satisfacă enunțul, trebue ca numerele $a0c$, $a01$ să fie prime.

Folosind o tabelă de numere prime găsim că $a01$, poate fi:

101, și atunci $a0c$, este: 101, 103, 107, 109
401, „ „ „ „ : 401, 409
601, „ „ „ „ : 601, 607
701, „ „ „ „ : 701, 709

In acest caz avem ca soluți $abcd$, numerile: 1011, 1031, 1071, 1091, 4011, 4091, 6011, 6071, 7011, 7091.

Pentru ca numerile $a2c3$ să răspundă enunțului, trebuie ca $a2c$, $a23$ să fie prime. Pentru $a23$, găsim:

223, și atunci $a2c$ este: 223, 227, 229
523, „ „ „ „ : 521, 523
823, „ „ „ „ : 821, 823, 827, 829

In acest caz avem ca soluții $abcd$, numerile: 2233, 2273, 2293, 5213, 5233, 8213, 8233, 8273, 8293.

Pentru ca numerile $a6c7$ să satisfacă enunțul, trebue ca numerile $a6c$, $a67$ să fie prime.

Pentru $a67$, găsim:

167, și atunci $a6c$ este: 163, 167
367, „ „ „ „ : 367
467, „ „ „ „ : 461, 463, 467
967, „ „ „ „ : 967

In asest caz avem ca soluții $abcd$, numerile:

1637, 1677, 3677, 4617, 4637, 4677, 9677.

Pentru ca numerile $a8c9$ să răspundă enunțului trebuie ca numerile $a8c$ și $a89$ să fie prime. Pentru $a89$, găsim:

389, și atunci $a8c$ este: 383, 389.

In acest caz avem ca soluții $abcd$, numerile: 3839, 3899.

Cazul al 2-lea. Dacă, $d-b=8$ și d e impar $\neq 5$, rezultă că numărul $abcd$, este de forma, $a1c9$.

Pentru ca $a1c9$ să satisfacă enunțul, trebuie ca numerile $a1c$, $a19$ să fie prime. Pentru $a19$, găsim:

419, și atunci $a1c$ este: 419
619, „ „ „ „ : 613, 617, 619
719, „ „ „ „ : 719
919, „ „ „ „ : 911, 919

In acest caz avem ca soluții $abcd$, numerile:

4199, 6139, 6179, 6199, 7199, 9119, 9199.

Problema are în total 35 de soluții.

Au găsit toate cele 35 de soluții, d-nii: *Crivăț I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, București), *Dimitriu A. Ioan* (absolvent, Galați), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenița) și *Motoc D. M.* (Lic. Oltenița).

Au găsit mai puține soluții, d-nii: *Antonescu Aurel* (14, absolvent), *Slt. Băcauu* (2, Sibiu), *Băcicov P. Boris* (9, bacalaureat, Tighina), *Băcicov P. Victor* (9, Lic. Tighina), *Bidoianu I. Adrian* (19, Lic. Oltenița), *Boerescu P. Gheorge* (34 Lic. Oltenița), *Bujoreanu Vicențiu* (12 Lic. Sincai, București), *Cincilian Poiană* (17, Câmpina), *Grecu M. Gristache* (30, Lic. Oltenița), *Ioanițescu Gh. D-tru* (7, Lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (7, Lic. Milit., Iași), *Lucian I. David* (27, Șc. Polit., Timișoara), *Marineanu Traian* (11, student, București), *Mereuță Emil* (15, absolvent, Lic. Piatra-Neamț), *Mihăileanu N.* (11, Lic. Constanța), *Millea G. Ene* (32, R.-Sărat), *Nichiforescu Gh.* (13, student), *Patran M.* (2, Lic. Milit., Iași), *Rusu D. C-tin* (5), *Scarlat D.* (12, Șc. Navală, Constanța), *Teodorescu Stavrache* (7, Lic. Milit., Iași), *Tiucra Mircea* (22, Șc. Polit, Timișoara), și *Ungheanu I. Mihail* (12, Lic. Oltenița).

864. — *Care din expresiile:*

$$E_1 = (1 - x^2)(x^2 + x + 1)$$

$$E_2 = (1 + x)^2 (x^2 - x + 1),$$

este mai mare când x variază și în ce intervale?

ION PROTOPOPESCU

Mai putem scri:

$$E_1 = (1 + x)(1 - x^3)$$

$$E_2 = (1 + x)(1 + x^3)$$

Observăm ușor că avem:

$$E_1 < E_2, \text{ pentru } x > 0$$

$$E_1 = E_2, \text{ pentru } x = 0$$

Pentru valori negative observăm tabloul:

x	$-\infty$	-2	-1	$-0,5$	0
E_1	$-\infty$	-9	0	$0,5625$	1
E_1	$+\infty$	7	0	$0,4375$	1

De unde rezultă încă:

$$E_1 < E_2, \text{ pentru } -\infty < x < -1$$

$$E_1 = E_2, \text{ pentru } x = -1$$

$$E_1 > E_2, \text{ pentru } -1 < x < 0$$

Soluții date de d-nii: *Crivăț I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, București), *Firoiu Jean* (Lic. Arad), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenița), *Mereuță Emil* (Șc. Polit., București), *Motoc D. M.* (Lic. Oltenița), *Parapeanu Ioan* (Lic. Brașov), *Rusu D. C-tin* (Constanța), *Tutoveanu Valeriu* (Sc. Polit. București) și *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara).

872. — *Să se găsească numerile prime de patru cifre $abcd$, astfel ca cifra doua și a patra să fie consecutive, iar numărul $dcba$ să fie patrat perfect.*

TRAIAN MARINEANU

Din enunț deducem:

$$d = 1, 3, 7, 9$$
$$b = 0, 2, 4, 6, 8$$

Numărul $abcd$ poate fi:

(1) $a0c1$, $a2c1$, $a2c3$, $a4c3$, $a6c7$, $a8c7$, $a8c9$

Fiindcă $dcba$ trebuie să fie patrat perfect, rezultă că:

(2) $0a$, $2a$, $4a$, $6a$, $8a$

trebuie să fie terminațiile unui patrat perfect și cum ultimele două cifre ale unui patrat perfect, sunt:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 89, 96,

rezultă că șirul (2) poate fi:

01, 04, 09, 21, 24, 25, 29, 41, 44, 49, 61, 64, 69, 81, 89

Privind șirul (1) deducem că numărul $abcd$ ar putea fi:

$10c1$, $40c1$, $90c1$, $12c1$, $42c1$, $52c1$, $92c1$, $12c3$, $42c3$, $52c3$, $92c3$, $14c3$, $44c3$, $94c3$, $16c7$, $46c7$, $96c7$, $18c7$, $98c7$, $18c9$, $98c9$

Folosind o tabelă de numere prime, putem găsi pe c, avem astfel pentru $abcd$:

1201, 1031, 1051, 1061, 1091, 4001, 4021, 4051, 4091, 9001, 9011, 9041, 9091, 1201, 1231, 1291, 4201, 4211, 4231, 4241, 4261, 4271, 5231, 5261, 5281, 9221, 9241, 9281, 1213, 1223, 1283, 4243, 4253, 4273, 4283, 5233, 5273, 9203, 9283, 9293, 1423, 1433, 1453, 1483, 1493, 4423, 4463, 4483, 4493, 9403, 9413, 9433, 9463. 9473, 1607, 1627, 1637, 1657, 1667, 1697, 4637, 4657, 9677, 9697, 1867, 1877, 9817, 9857, 9887, 1879, 1889, 9829, 9839, 9859

Inversând aceste numere găsim că pătrate perfecte, sunt numai:

$$1024 = 32^2 \text{ și } 3844 = 62^2.$$

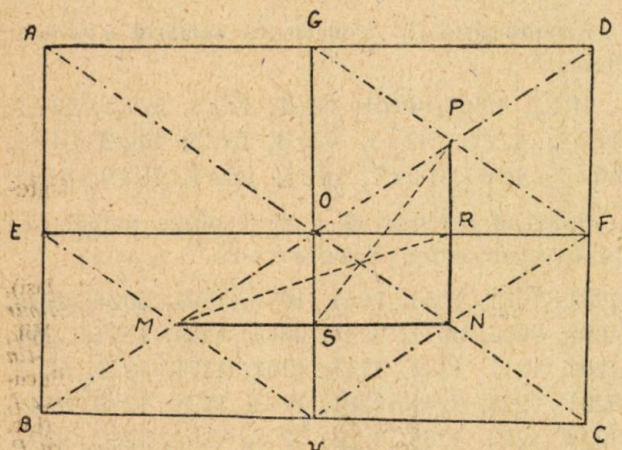
Soluțiile problemei sunt astfel, 4201 și 4483.

Soluţii date de d-nii: *Băcicov Boriş* (Tighina), *Boerescu P. Gheorghe* (Lic. Oltenița), *Bugeanu C.* (cl. IV, lic. Timişoara), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Derenbaum* (Lic. Tighina), *Dimitriu At. Joan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ioanițescu Gh. D-tru* (Lic. Milit, Iaşi), *Grecu Cristache* (Lic. Oltenița), *Ionescu C. Iulian* (Lic. Mil., Iaşi), *Ionescu B. Haralamb* (Lic. Oltenița), *Lucian I. David* (Şc. Polit, Timişoara), *Merenţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu Nicolae* (Lic. Constanța), *Motoc I. M.* (Lic. Oltenița), *Patron M.* (Lic. Mil., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenița), *Sâmbotira G.* (absolvent, Chişinău) şi *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi).

875. — *Se dă dreptunghiul* A B C D *şi fie* E F *şi* G H *dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse,* O *punctul lor de intersecţie. Fie* M, N, P *centrele dreptunghiurilor* E B H O, O H C F, O F D G *şi fie* R *şi* S *mijloacele lui* O F *şi* O H. *Să se dovedească că dreptele* M R *şi* P S *trec prin punctul de intersecţie al medianelor triunghiului* M N P.

V. ALACI

Diagonalele A C, B D a dreptunghiului dat, trec evident prin O şi intersecţiile lui B D cu E H şi G F ne dau punctele M, P, iar intersecţia lui A C cu H F ne dă punctul N.



M N unind mijloacele lui O B şi O C este paralelă cu B C şi îşi are mijlocul său pe mediană O H a triunghiunghiului B O C adică în S, deci P S este mediană în triunghiul M N P. Analog R este mijlocul lui P N deci M R este altă mediană a triunghiului M N P. Dreptele M R şi P S trec astfel prin punctul de intersecţie a medianelor triunghiului M N P, de oarece ele însuşi sunt două mediane a acestui triunghiu.

Soluţii date de d-nii: *Bujoreanu Vicenţiu* (Lic. Sincai, Bucureşti), *Chirilă Gheorghe* (Lic. Milit., Iaşi), *Crivăţ Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Dimitriu G. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Ghisoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (Lic. Oltenița), *Ioanițescu Gh. D-tru* (Lic. Milit., Iaşi), *Ionescu C. Iulian* (Lic. Milit., Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenița), *Leibovici M.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Pol., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emil* (Şc. Pol., Bucureşti), *Mihăileanu Nicolae* (Lic. Constanța), *Motoc D. M.* (Lic. Oltenița), *Oelze Emil* (Şc. Polit, Timişoara), *Patron M.* (Lic. Milit., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenița), *Popovici Gh. Valentin* (Lic. Câmpina), *Purdă Anton* (Lic. Braşov), *Rameder Carol* (Lic. Naţional, Iaşi), *Rusu D. G-tin* (Constanța), *Schneier Th.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Ştefanescu Anibal* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Tutoveanu Valeriu* (Şc. Polit., Bucureşti) şi *Vasiliu Alexandru* (Lic. Naţional, Iaşi).

Soluţie mecanică. Presupunem că A B C D *ar fi un carton omogen, din care scoatem dreptunghiul* A G O E. *Să aflăm centrul de greutate al cartonului rămas.*

Observăm că M, N, P sunt centrele de greutate ale dreptunghiuriilor E B H O, O H C F, O F D G, în care lucrează forţe egale, proporţionale cu suprafeţele respective.

Rezultă uşor că centru de greutate căutat, este la intersecţia dreptelor M R şi P S, care este în acelaşi timp centru de greutate al triunghiului M N P.

876. — *Să se pună polinomul:*

$$2x^3 - 15x^2 + 78x - 92,$$

sub forma:

$$A(x+a)^3 + B(x-b)^3$$

CEZAR COSNITA

Trebuie să avem:

$$2x^3 - 15x^2 + 78x - 92 \equiv A(x+a)^3 + B(x-b)^3,$$

sau:

$$2x^3 - 15x^2 + 78x - 92 \equiv (A+B)x^3 +$$

$$3(Aa - Bb)x^2 + 3(Aa^2 + Bb^2)x + Aa^3 - Bb^3$$

Din identificare deducem:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ Aa - Bb = -5 \\ Aa^2 + Bb^2 = 26 \\ Aa^3 - Bb^3 = -92 \end{cases}$$

Inmulţim prima ecuaţie cu b şi o adunăm cu a doua, avem:

$$A(a+b)=2b-5 \quad (1)$$

Inmulţim ecuaţia a doua a sistemului cu b şi adunând cu a treia, avem:

$$Aa(a+b)=26-5b \quad (2)$$

Inmulţind ecuaţia a treia a sistemului cu b şi adunând cu a patra, avem:

$$Aa^2(a+b)=26b-92 \quad (3)$$

Impărţind relaţiile (2) prin (1) şi (3) prin (2), avem:

$$a=\frac{26-5b}{2b-5}, a=\frac{26b-92}{26-5b}$$

De aci deducem:

$$\frac{26-5b}{2b-5}=\frac{26b-92}{26-5b}$$

$$(26-5b)^2=(26b-92)(2b-5) \quad **$$

Dezvoltând, ordonând în raport cu b şi simplificând cu 27, avem:

$$b^2-2b-8=0$$

deci: $b=-2$ şi $b=4$

Deducem acum uşor următoarele sisteme:

$$A=\frac{1}{2}, B=\frac{3}{2}, a=2, b=4;$$

$$A=\frac{3}{2}, B=\frac{1}{2}, a=-4, b=-2$$

Polinomul dat se poate pune astfel sub forma:

$$2x^3-15x^2+78x-92=\frac{1}{2}(x+2)^3+\frac{3}{2}(x-4)^3$$

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit., Iaşi), *Băcicov Boris* (student, Tighina), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), şi *Tutoveanu Valeriu* (Şc. Polit., Bucureşti).

877. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} xy(xy+yz+zx)=a^2 \\ yz(yz+zx+xy)=b^2 \\ zx(zx+xy+yz)=c^2 \end{cases}$$

I. NICOLAU DOBRIDOR

Adunând ecuaţiile sistemului, găsim:

$$(xy+yz+zx)^2=a^2+b^2+c^2$$

$$xy+yz+zx=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad (1) \quad **$$

Impărţind fiecare ecuaţie a sistemului cu ecuaţia (1) obţinem:

$$\begin{cases} xy=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ yz=\pm\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \\ zx=\pm\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases} \quad (2)$$

Inmulţind aceste ecuaţii şi extrăgând apoi rădăcina patrată, avem:

$$xyz=\frac{\pm abc\sqrt{\pm 1}}{\sqrt[4]{(a^2+b^2+c^2)^3}} \quad (3)$$

Impărţind ecuaţia (3) pe rând cu ecuaţiile sistemului (2), obţinem:

$$\begin{cases} z=\pm\dfrac{bc\sqrt{\pm 1}}{a\sqrt[4]{a^2+b^2+c^2}} \\ x=\pm\dfrac{ac\sqrt{\pm 1}}{b\sqrt[4]{a^2+b^2+c^2}} \\ y=\pm\dfrac{ab\sqrt{\pm 1}}{c\sqrt[4]{a^2+b^2+c^2}} \end{cases} \quad (4)$$

Relaţiile (4) ne dau sistemul de soluţii a sistemului de ecuaţii dat:

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (Lic. Mil., Iaşi), *Băcicov Boriş* (bacalaureat, Tighina), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Cuciureanu Şt.* (Lic. Mil., Iaşi), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Dimitriu G. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Pol., Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (Lic. Carol, Craiova), *Ioaniţescu Gh. D-tru* (Lic. Mil., Iaşi), *Ionescu C. Iulian* (Lic. Mil., Iaşi) *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Iotta D. Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Lucian I. David* (Şc. Polit., Timişoara), *Marcu Aureliu* (Şc. Pol., Timişoara). *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara). *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. Nicolae* (Lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic. Oltenita), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Oelze Emil* (Şc. Polit., Timişoara), *Patron Mihai* (Lic. Milit., Iaşi), *Parepeanu Ioan* (Lic. Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă Anton* (Lic. Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa), *Sâmbotin Gicu* (absolvent, Chişinău), *Schneier L.* (Lic. Naţional,

Iași), *Șaur Ioan* (Șc. Pol., Timișoara), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iași), *Tutoveanu Valeriu* (Șc. Polit., București) și *Vasiliu Alexandru* (Lic. Național, Iași).

Observare. Au generalizat problema pentru un sistem cu n necunoscute, d-nii: *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București) și *Grossu I. Mircea* (Lic. Carol, Craiova).

PROBLEME PROPUSE

913. — Să se găsească numerile de patru cifre $abcd$, știind că cb, ad, da, bc sunt în progresie aritmetică.

IOAN GH. POPA

914. — Se cere patratul perfect $abcdbcd$, știind că:

$$2a + c = d - 1.$$

HARALAMB P. IONESCU

915. — Fie BAC un triunghiu dreptunghiu înscris în cercul O și AA' bisectoarea corespunzătoare unghiului drept. Cercul de centru A și de rază $A'A$ taie a doua oară cercul O în P. Q fiind punctul diametral opus lui P în cercul A' și M proecția lui P pe BC.

1°. Să se arate că patrulaterul $PQOM$ este un paralelogram.

2°. Să se calculeze suprafața acestui paralelogram cunoscând catetele triunghiului BAC.

JUSTIN N. VALCEANU

916. — Fie A', B', C' extremitățile medianelor triunghiului ABC, prelungite respectiv cu o treime din fiecare; iar F și G extremitățile a două mediane, prelungite în sens invers, cu câte două treimi din fiecare mediană. Intersecțiile laturilor triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, fiind a, b, c, d, e, f, să se arate că:

1°. Dacă două din patrulaterele $acdf, bcef, abde$, sunt dreptunghiuri și al treilea a dreptunghiu.

2°. Laturile triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ se împart reciproc în câte trei părți egale.

3°. Punctele F și G sunt coliniare cu un anumit vârf al triunghiului $A'B'C'$.

ION MARGINEANU

917. — Să se demonstreze că suma:

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^n - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^n + \ldots \pm n$$

este egală cu $n!$

In demonstrație nu se va face uz de cunoașterea identității:

$$x^n - C_n^1(x-1)^n + C_n^2(x-2)^n - \ldots + (-1)^n C_m^n (x-n)^n \equiv n!,$$

enunțată, dar nedemonstrată în *Cours d'Algèbre* par *B. Niewenglowski*, quatrième èdition tome II, pagina 506.

COL. GH. BUICLIU

Erată. Ecuația 3-a din problema 883, trebuie corectată astfel:

$$z(xy + x + y) + xy = 22.$$

918. — Să se rezolve ecuațiile:

$$f(x) = x^2 \sin 2\alpha_1 - 2x \sin(\alpha_1 + \alpha) + \sin 2\alpha = 0$$

$$f_1(x) = x^2 \cos 2\alpha_1 - 2x \cos(\alpha_1 + \alpha) + \cos 2\alpha = 0$$

$$f(x) + f_1(x) = 0,$$

unde α și α_1 sunt două arce cunoscute. Să se determine în urmă α și α_1 în cazul când prima ecuație are rădăcinele $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{6}}{2}$.

V. ALACI

919. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:

$$\sum \sin^2 A - \frac{1}{4}\prod \frac{a^2+b^2-c^2}{ab} = \frac{1}{3R}\sum \frac{a}{\sin A}$$

EMIL MEREUTA

920. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația:

$$\sum\left(\cos^2\frac{A}{2} + \frac{s^2 - r^2 r_a^2}{b_c r_a^2} - \sin^2\frac{A}{2}\right) = 2$$

CRIVAT I VLADIMIR

INFORMAȚIUNI

D. Georgescu, profesor. *Culegere de Probleme pentru bacalaureat și Cursul Superior de Liceu.* (Cuprinde, 402 probleme cu soluțiile lor, din care peste 300 au fost propuse la examenul de bacalaureat din Iunie și Septembrie 1929). Pitești, prețul 120 lei.

Ing. Radu Criveanu și *I. B. Florescu. Probleme de matematici pentru bacalaureat, după programa analitică actualmente în vigoare.*

Enunțuri și soluțiuni complecte, prețul 80 lei.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 IULIE 1930 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. SOLEMNITATEA DEZVELIRII BUSTULUI LUI TRAIAN LALESCU
2. A. V. NICULESCU RECIPROCA TEOREMEI LUI PAPPUS
3. NOTE MATEMATICE: 12, 13
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 754, 759, 878, 880, 884, 885, 886
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească“

Avem plăcerea să anunţăm că mai face parte din Comitetul Revistei şi d-l **Emil Mihaiu,** profesor la Şcoala Comercială din Timişoara şi Actuar Matematic diplomat.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — No. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

SOLEMNITATEA DEZVELIRII BUSTULUI LUI TRAIAN LALESCU

In ziua de 22 Iunie 1930, a avut loc în Timișoara, dezvelirea bustului regretatului profesor *Traian Lalescu*. Bustul lucrat în marmoră este ridicat pe un impunător soclu tot de marmoră, în fața pavilionului Mecanic de la Școală Politechnică și este opera talentatului sculptor d-l *Medrea*.

La pioasa solemnitate a luat parte în afară de familia regretatului *Traian Lalescu* și Ministrul

Banatului, toate autoritățile, întreaga Școală Politechnică cu rectorul, profesorii și studenții săi, diferite persoane marcante din armată, magistratură, corpul didactic secundar, și numeros public.

După oficierea unui parastas de un an de la moartea lui *Traian Lalescu,* iau cuvântul: părintele protoereu *Țiucra*, d-l rector *V. Vâlcovici* în numele Școalei Politechnice din Timișoara care a ridicat monumentul, d-l Ministru *Sever Bocu* în numele guvernului și a Asociației Culturale Bănățene, d-l profesor *D. Ghermani* în numele Școalei Politechnice din București, d-l *V. Alaci* în numele Gazetei Matematice din București și a Revistei Matematice din Timișoara, d-l Dr. *R. Raclis* în numele Revistei Universitare din București, d-l Inginer *N. Ardeleanu* în numele Societății pentru Cultura Românilor din Banatul Iugoslav, d-l Dr. Inginer *I. Vlădescu* în numele foștilor elevi a lui *Traian Lalescu* de la Școală Politechnică din Timișoara și studentul *A. Coliu* în numele studenților Școalei Politechnice din Timișoara.

La toți le răspunde emoționat tânărul *Nicușor Lalescu* în cuvinte pline de simțire pentru părintele său și de adâncă mulțumire pentru inițiatori.*)

Toate cuvântările ținute au vibrat de o adâncă emoțiune și au căutat să pună în lumină calitățile superioare de minte și inimă, ale celui ce a fost *Traian Lalescu,* care a dus și dincolo de granițele Țării noastre faima geniului românesc.

In numele „Revistei Matematice" din Timișoara, care a luat ființă din dragostea nemărginită de școală a lui *Traian Lalescu,* d-l *V. Alaci* rostește următoarea cuvântare.

Domnule Ministru, Prea stimate Doamne Lalescu și Procopescu, Onorată Familie, Domnule Rector, Onorată azistență.

In numele *Gazetei Matematice* din București și a *Revistei Matematice* din Timișoara, aduc prinosul de profundă recunoștiință și admirație memoriei, marelui și regretatului Profesor *Traian Lalescu*, a cărui flacără de geniu s'a stins prea de timpuriu din cuprinsul țărei noastre.

*) Aceste cuvântări se publică toate într'o broșură omagială. Care din corespondenții noștri doresc s'o aibă gratuit se pot adresa direct Redacției acestei Reviste.

Inzestrat cu o inteligență vie și sclipitoare, tânărul *Lalescu* face studii strălucite în țară și străinătate, ocupând pretutindeni locul întâi. Astfel îl găsim ca elev strălucit la Liceul internat din Iași, fiind primul clasificat în fie-care clasă, numele său rămânând săpat pentru totdeauna cu litere de aur în marmora de onoare a liceului internat din Iași.

Incă de pe băncile liceului, grație talentului său deosebit, tânărul *Lalescu* arată înclinări de o potrivă pentru partea literară și științifică, dar căzându-i în mână renumita și binefăcătoarea revistă „G. M." din București, elevul *Lalescu* se pasionează repede și puternic de chestiunile de matematici și desfășoară în calitate de corespondent o bogată activitate, care pune în uimire chiar pe conducătorii G. M.

Iată ce spune în amintirile sale despre harnicul corespondent *Lalescu,* D-l Inginer Inspector General *Ion Ionescu,* unul din fondatorii și conducătorii G. M., care primea manuscrisele dela corespondenți: „A fost un caz unic de apariție la G. M. de activitate prodigioasă a unui tânăr licean!, Bănuisem la început că are vre-un profesor care îi face problemele". Mai departe spune: „A-și putea compara apariția cu acele probleme matematice, care nu admit nici o soluțiune, dacă o anumită condițiune nu este îndeplinită, dar care, dacă condițiunea e împlinită, numărul soluțiilor devine infinit".

Terminând liceul, cu atâta strălucire și cu largi perspective de desvoltare, *Lalescu* cucerește ușor locul întâi în școala de Poduri și Șosele din București, și își păstrează acest loc de onoare și în următorii trei ani cât a urmat școala.

Fiind student al școalei de Poduri și Șosele, *Lalescu* găsește totuși timpul necesar să'și prepare și să treacă cu strălucire și examenele dela Universitatea din București, de unde își ia cu distincțiune licența în Matematici.

Dornic de a se avânta în regiunile cele mai superioare ale domeniului matematic, dornic de glorie și de renume pentru sine și pentru Țara sa, *Lalescu*, odată licența în matematici luată, fără a fi terminat studiile inginerești, pleacă cu o bursă în străinătate, la cea mai strălucită universitate din lume, la *Sorbona.*

Aci la Paris, are ocazia să dea drum larg spiritului său cercetător, să pună în mai mare valoare originalitatea sa de gândire şi ast-fel se avântă cu toată puterea tinereţei şi a talentului său, în regiunile cele mai ridicate ale ştiinţilor matematice şi cucereşte rând pe rând, adevăruri noui, fecunde şi definitive în Teoria Ecuaţiilor Integrale, pe care le expune cu toată claritatea şi lumina necesară în teza sa de doctorat, magnifica sa teză, pe care o susţine cu atâta strălucire la *Sorbona* în 1908, şi care are atâta răsunet în toată lumea ştiinţifică.

Dragostea, pasiunea şi setea sa nepotolită de ştiinţă, îl trimite încă pentru un an la Göttingen, alt centru important de matematici, unde şi aci aduce noui puncte de vedere şi stabileşte noui rezultate.

In 1909 *Lalescu* se întoarce în ţară, într'o aureolă plină de glorie şi strălucire, urcă repede toate treptele erarchiei didactice, dela profesor secundar până la profesor titular la Universitatea şi Şcoala de Poduri şi Şosele din Bucureşti.

In tot acest interval, *Lalescu* publică şi numeroase lucrări în ţară şi străinătate din diferite domenii ale matematicilor şi mai ales trebue să relevăm cartea sa devenită clasică: „Introduction à la théorie des équations intégrales", care este citată foarte des în toate tratatele ce se ocupă cu ecuaţiunile integrale şi care cuprind, unele din ele, demonstraţii întregi datorite lui *Lalescu*, cum este de exemplu în cartea D-lui *Volterra*.

Şi ca profesor *Lalescu* este neîntrecut, are calităţi şi merite cu totul deosebite. Graţie firei sale deschise şi comunicative, a entusiasmului său fără margini, a acelui dar nepreţuit de a şti să se apropie de studenţii săi, care îl admiră şi îl iubesc, *Lalescu* reuşeşte să deştepte studenţilor săi nu numai dragostea de a învăţa, dar şi aceea de a cerceta, de a crea.

Neuitate rămân pentru mine şi pentru toţi cei ce au urmărit, lecţiunile sale asupra *„Seriilor Trigonometrice"* din 1919—1920, pentrucă aci s'a putut vedea întreaga putere a talentului său matematic şi neîntrecutele sale calităţi pedagogice.

Iată în puţine cuvinte, drumul regal, calea de glorie şi strălucire pe care a parcurs'o în viaţă neîntrecutul *Traian Lalescu*, a cărui operă nu dispare însă odată cu el, ci rămâne mărturie vie şi în afară de graniţele ţărei noastre, despre puterea geniului românesc.

Voesc încă foarte pe scurt, să înfăţişez şi o altă latură a spiritului variat şi puternic înzestrat, a lui *Lalescu*.

După războiul nostru glorios, de unire a tuturor românilor, o dorinţă veche a *Banatului*, brăzdat cu numeroase fabrici şi industrii, era de a avea în cuprinsul său o şcoală superioară corespunzătoare, o şcoală de ingineri. Această năzuinţă a *Banatului*, găseşte un puternic răsunet şi în inima de mare patriot a profesorului *Traian Lalescu*, el însuşi fiu al *Banatului*, şi prin stăruinţa şi sforţările sale neobosite, alături de acelea ale autorităţilor şi a unor bărbaţi luminaţi din acest oraş, pe cari noi cu toţii îi cunoaştem, se obţine deplina izbândă, şi ast-fel ia fiinţă Şcoală Politechnică din Timişoara, în 22 Decembrie 1920.

Pentru a asigura şcoalei o bună desvoltare şi o vecinică existenţă *Lalescu* primeşte în primul an să'i fie rector şi profesor, şi desfăşoară o activitate intensă pentru înlăturarea greutăţilor dela început.

Tot în acest timp, din dragostea sa mare pentru şcoală, *Lalescu* înfiinţează şi *Revista Matematică* din Timişoara, care se află azi în al 10-lea an al existenţei sale.

Şi acum, iubite Domnule Rector, noi profesorii şi studenţii acestei Şcoli, îţi aducem călduroase mulţumiri şi profundă recunoştiinţă, pentru că dintr'un sentiment de o deosebită delicateţă sufletească şi din dragostea nemărginită ce o purtai lui *Lalescu*, caşi noi toţi cei ce l'am cunoscut, a-i luat iniţiativa, divina iniţiativă de a ridica pe acest soclu de marmoră chipul senin şi luminat a marelui şi nemuritorului *Traian Lalescu*, care şi de pe acest soclu ne v'a spune vecinic, nouă profesorilor şi studenţilor acestei şcoli cari îl vom vedea zilnic:

Totul pentru ştiinţă, pentru glorie şi pentru Ţară.

RECIPROCA TEOREMEI LUI PAPPUS

de ALEXANDRU V. NICULESCU

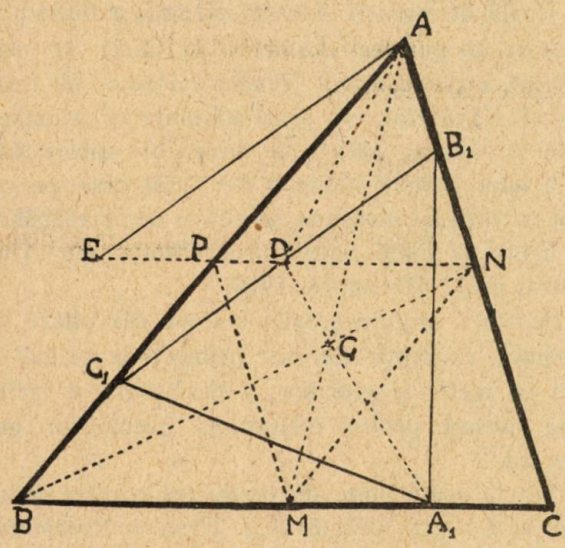
Teorema lui Pappus se enunţă astfel:

„Dacă impărţim laturile unui triunghiu în acelaş

sens în acelaş raport, atunci triunghiul format cu cele trei puncte de diviziune are acelaş centru de greutate ca triunghiul primitiv".

In cele ce urmează voiu demonstra teorema reciprocă, pe care n'am găsit-o în nici unul din manualele clasice:

„*Dacă un triunghiu, înscris într'un triunghiu dat, are acelaş centru de greutate ca acest triunghiu, atunci vârfurile lui împart laturile triunghiului dat în acelaş sens în acelaş raport*".



Să arăt cum se poate construi un asemenea triunghiu. Fie, pentru aceasta ABC triunghiul dat; $A_1B_1C_1$ triunghiul căutat; G centrul de greutate comun; M, N, P mijloacele laturilor triunghiului ABC; D mijlocul laturei C_1B_1. Se observă că din cauza rapoartelor egale:

$$\frac{GD}{GA_1} = \frac{GN}{GB}$$

dreapta DN, paralelă cu BC, va trece şi prin punctul P. Problema determinării poziţii dreptei C_1B_1 revine la o problemă cunoscută: „*Fiind dat un punct în interiorul unui unghiu să se ducă o dreaptă* C_1B_1, *care să-şi aibă mijlocul în* D".

Voiu determina dreapta AE conjugata armonică a dreptei AD în raport cu unghiul A; dreapta C_1B_1 va fi paralela dusă prin D la AE. Există deci o singură dreaptă; construcţia triunghiului $A_1B_1C_1$, fiind dată, poziţia punctului D pe PN, se determină uşor ducând acum dreapta DG care taie pe BC în A_1.

Să calculăm rapoartele:

$$\frac{B_1C}{B_1A}, \frac{C_1A}{C_1B}, \frac{A_1B}{A_1C},$$

ţinând seamă şi de sensul segmentelor.

Am:

$$\frac{\vec{NB_1}}{\vec{B_1A}} = \frac{\vec{ND}}{\vec{DE}}$$

Ori:

$$\vec{B_1C} = \vec{B_1N} + \vec{NC} = -2\vec{NB_1} + \vec{AB_1}$$

Deci:

$$\frac{\vec{B_1C}}{\vec{B_1A}} = \frac{-2\vec{ND} - \vec{DE}}{\vec{DE}} = -\frac{\vec{ND} + \vec{NE}}{NE - ND}$$

La fel:

$$\vec{C_1B} = \vec{PB} - \vec{PC_1} = -2\vec{PC_1} - \vec{C_1A};$$

şi:

$$-\frac{\vec{PC_1}}{AP} = \frac{\vec{PD}}{PE}$$

sau:

$$\frac{\vec{PC_1}}{-AP - PC_1} = \frac{\vec{PD}}{PE - PD}$$

$$-\frac{\vec{PC_1}}{AC_1} = \frac{\vec{PD}}{PE - PD}$$

de unde:

$$\frac{\vec{AC_1} - 2\vec{PC_1}}{AC_1} = \frac{2\vec{PD} + \vec{PE} - \vec{PD}}{PE - PD}$$

şi prin urmare:

$$\frac{\vec{C_1B}}{AC_1} = \frac{PE + PD}{PE - PD}$$

In definitiv:

$$\text{şi:} \begin{cases} \dfrac{\vec{B_1C}}{B_1A} = \dfrac{\vec{DN} + \vec{EN}}{DN - EN} \\ \dfrac{\vec{C_1A}}{C_1B} = \dfrac{\vec{DP} - \vec{EP}}{DP + EP} \end{cases}$$

Ori fascicolul A (EPDN) fiind armonic, avem:

$$\frac{\overrightarrow{EN}}{EP} = -\frac{\overrightarrow{DN}}{DP}$$

sau:

$$\frac{\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{DN}}{EP-DP} = \frac{\overrightarrow{EN}-\overrightarrow{DN}}{EP+DP};$$

deci:

$$\frac{\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{EP}}{DP+EP} = \frac{\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{DN}}{DN-EN}$$

Aşa dar:

$$\frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}}$$

Mai rămâne să calculăm şi raportul $\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}}$; pe figură avem imediat:

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{DN}}{DP} = -\frac{\overrightarrow{EN}}{EP} = \frac{\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{DN}}{DP-EP}$$

Cum:

$$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{DN}; \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{PN}$$

rezultă:

$$\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{EN}$$

deci:

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{DN}}{DN-EN} = \frac{\overrightarrow{B_1C}}{\overrightarrow{B_1A}}$$

teorema reciprocă este astfel demonstrată.

O conseciinţă interesantă, ce s'ar putea demonstra şi direct este următoare problemă:

„Fie ABC *un triunghiu echilateral,* MNP *triunghiul său median,* D *un punct pe* NP, *iar* G *centrul de greutate. Să se arate că perpendiculara* C_1B_1 *pe* DG *determină segmentele egale:* $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{B_1A}$, D *fiind mijlocul totdeodată al dreptei* $\overrightarrow{B_1C_1}$*“.*

Să demonstrăm acum următoare teoremă:

„Dacă triunghiul înscris $A_1B_1C_1$ *are acelaş centru de greutate ca triunghiul* ABC, *atunci triunghiul înscris* $A_2B_2C_2$ *astfel că:*

$$(I) \qquad \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{B_2B_2}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\overrightarrow{AB}}$$

are şi el acelaş centru de greutate.

Procedez inductiv; pentru asta iau cazul particular când:

$$\Delta A_1B_1C_1 \equiv \Delta MNP;$$

relaţiile date devin:

$$\frac{\overrightarrow{MA_2}}{BC} = \frac{\overrightarrow{NB_2}}{CA} = \frac{\overrightarrow{PC_2}}{AB};$$

cărora aplicând proprietăţile rapoartelor se deduce fără greutate:

$$\frac{\overrightarrow{BA_2}}{BC} = \frac{\overrightarrow{CB_2}}{CA} = \frac{\overrightarrow{AC_2}}{AB}$$

şi'n definitiv:

$$\frac{\overrightarrow{A_2B}}{A_2C} = \frac{\overrightarrow{B_2C}}{B_2A} = \frac{\overrightarrow{C_2A}}{C_2B},$$

deci după teorema directă a lui *Pappus* cele două triunghiuri ABC şi $A_2B_2C_2$ au acelaş centru de greutate.

Să demonstrăm cazul general; scrim:

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{BC} = \frac{\overrightarrow{MA_2}-\overrightarrow{MA_1}}{BC} = \frac{\overrightarrow{MA_2}}{BC} - \frac{\overrightarrow{MA_1}}{BC},$$

unde am presupus punctele A_1 şi A_2 de-aceiaş parte cu M, altfel luăm semnul plus.

Ori triunghiul $A_1B_1C_1$ înscris, având acelaş centru de greutate ca triunghiul ABC, rezultă după teorema reciprocă:

$$\frac{\overrightarrow{MA_1}}{BC} = \frac{\overrightarrow{NB_1}}{CA} = \frac{\overrightarrow{PC_1}}{AB}$$

Rămâne deci şirul de rapoarte:

$$\frac{\overrightarrow{MA_2}}{AC} = \frac{\overrightarrow{NB_2}}{CA} = \frac{\overrightarrow{PC_2}}{AB},$$

cari nu sunt decât rapoartele:

$$\frac{\overrightarrow{A_2B}}{A_2C} = \frac{\overrightarrow{B_2C}}{B_2A} = \frac{\overrightarrow{C_2A}}{C_2B}$$

transformate. Deci....

Această teoremă ne oferă o inducție la teorema lui *Pappus*. In adevăr cunoscând un triunghiu $A_1B_1C_1$ putem deduce altul cu relațiile (I) și așa mai departe. Dar unul il cunoaștem: este triunghiul median, putem deci să-le găsim pe celelalte toate. Modul acesta de-a obține pe unul dintr'altul, sau pe toate dintr'unul, după cum se observă ușor, ne pune în evidență o transformare, ori mai precis: un grup de transformări cari aci sunt: *transformările affine* — căci păstrează dreapta dela infinit și centrul de greutate.

Faptul aceasta de-altfel reese clar, dacă considerăm *proecția cilindrică* a unui triunghiu echilateral (a se vedea și Ex. de géom. par F. G. M pg. 513). O altă conseciință a relațiilor (I) este deducerea enunțului mecanic al teoremei lui *Pappus*. In adevăr să presupunem pe A_2 foarte apropiat de A_1, iar punctele A_1, B_1, C_1 să le considerăm ca mobile; vectorii $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{C_1C_2}$ îi putem considera ca reprezentând iuțelile acestor mobile, căci sunt infiniți mici de acelaș ordin. Deci:

Dacă trei mobile parcurg laturile unui triunghiu în acelaș șens, plecând respectiv din mijloacele laturilor, cu viteze proporționale laturilor, atunci centrul de greutate al sistemului mobil rămâne pe loc.

Demonstrația dată aci o cred nouă; cea cunoscută se bazează pe considerații mecanice, de descompunerea forțelor.

NOTE MATEMATICE

12. *Generalizarea exercițiului 46 — „G. M". — XXXIII.*

Exercițiul 46 din „G. M." — XXXIII — 277, generalizat devine:

Să se arate că:

$$E = (A_1^a + A_3^a)(A_2 A_5^b - A.A_4^b) + (A_4^b + A_5^b) \times$$

$$(A.A_1^a - A_2.A_3^a)$$

se divide prin:

$$(A + A_2).$$

Efectuând parantezele avem:

$$E = A_1^a A_2 A_5^b - A A_1^a A_4^b + A_2 A_3^a A_5^b - A A_3^a A_4^b$$

$$+ A A_1^a A_4^b + A A_1^a A_5^b - A_2 A_3^a A_4^b - A_2 A_3^a A_5^b,$$

ăcând reducerile posibile avem:

$$E = (A + A_2) \cdot (A_1^a A_5^b - A_3^a A_4^b),$$

ceea ce era de dovedit.

Acum dacă facem:

$$A_1 = 18, A_2 = 23, A_3 = 33, A_4 = 131, A_5 = 723,$$

$$a = 106, b = 200$$

acem tocmai exercițiul din „G. M."

HARALAMB P. IONESCU

13. *Asupra cevienelor în triunghiuri.*

Să considerăm un triunghiu oarecare ABC și trei ceviene: AA_1, BB_1, CC_1 concurente în O. Notăm:

$$\frac{AO}{AA_1} = x, \quad \frac{BO}{BB_1} = y, \quad \frac{CO}{CC_1} = z$$

și:

$$\frac{OA_1}{AA_1} = x_1, \frac{OB_1}{BB_1} = y_1, \frac{OC_1}{CC_1} = z_1.$$

Ne propunem a găsi o relațiune simetrică între x, y, z și una între x_1, y_1, z_1.

Triunghiul OA_1C tăiat de transversala AB ne dă:

$$\frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{BA_1}{BC} \cdot \frac{C_1C}{C_1O} = +1,$$

de unde:

$$x = \frac{BC}{BA_1} \cdot \frac{C_1O}{C_1C}.$$

Dar avem:

$$\frac{BC}{BA_1} = \frac{BA_1 + A_1C}{-A_1B} = 1 - \frac{A_1C}{A_1B}$$

$$\frac{C_1O}{C_1C} = \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{CC_1 - CO}{CC_1} = 1 - \frac{CO}{CC_1} = 1 - z.$$

Rezultă, deci:

$$x = (1 - z)\left(1 - \frac{A_1C}{A_1B}\right) \cdot \cdot \cdot$$

$$1-\frac{x}{1-z}=\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\cdot\frac{z+x-1}{z-1}=\frac{A_1C}{A_1B}.$$

La fel deducem relaţiile:

$$\frac{x+y-1}{x-1}=\frac{B_1A}{B_1C},\ \frac{y+z-1}{y-1}=\frac{C_1B}{C_1A}.$$

Eliminăm pe x, y, z între aceste trei relaţii; înmulţindu-le şi ţinând seamă că:

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}=-1,$$

deducem:

$$(x+y-1)(y+z-x)(z+x-1)$$
$$\equiv(1-x)(1-y)(1-z).$$

Pentruca să subsiste această identitate, trebuie ca fiecare factor din primul membrul să fie egal cu câte un factor din celalt membru; şi deoarece căutăm o relaţie simetrică între x, y, z, nu putem avea decât:

$$\begin{cases} x+y-1=1-z \\ y+z-1=1-x \\ z+x-1=1-y, \end{cases}$$

cari ne conduc, toate, la aceiaşi relaţie simetrică:

$$x+y+z=2,$$

deci:

$$(1)\qquad \frac{AO}{AA_1}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=2,$$

relaţiune cunoscută.

Tot din relaţia care spune că punctele A, C_1, B, situate pe laturile triunghiului OA_1C sunt coliniare, deducem:

$$z_1=\frac{AO}{AA_1}\cdot\frac{BA_1}{BC}.$$

Dar avem:

$$\frac{AO}{AA_1}=\frac{AA_1-OA_1}{AA_1}=1-\frac{OA_1}{AA_1}=1-x_1.$$

Deasemenea:

$$\frac{BA_1}{BC}=\frac{BC-A_1C}{BC}=1+\frac{A_1C}{A_1B-A_1C}$$
$$=1+\frac{1}{\frac{A_1B}{A_1C}-1}.$$

Rezultă deci:

$$z_1=(1-x_1)\left(1+\frac{1}{\frac{A_1B}{A_1C}-1}\right).$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{z_1}{1-x_1}=1+\frac{1}{\frac{A_1B}{A_1C}-1}$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{z_1+x_1-1}{x_1-1}=-\frac{1}{\frac{A_1B}{A_1C}-1}$$

$$\overset{*}{**}\quad 1-\frac{x_1-1}{z_1+x_1-1}=+\frac{A_1B}{A_1C}$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{z_1}{z_1+x_1-1}=+\frac{A_1B}{A_1C}.$$

Inmulţim aceste trei relaţii:

$$(x_1+y_1-1)(y_1+z_1-1)(z_1+x_1-1)\equiv-x_1y_1z_1.$$

Ca să obţinem o relaţie simetrică trebuie să luăm:

$$\begin{cases} x_1+y_1-1=-z_1 \\ y_1+z_1-1=-x_1 \\ z_1+x_1-1=-y_1. \end{cases}$$

Obţinem relaţia:

$$x_1+y_1+z_1=+1.$$

Deci:

$$(2)\qquad \frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1,$$

relaţie cunoscută.

Aplicaţii: a_1. Dacă O este centrul de greutate al ariei triunghiului, relaţiile (1), (2) sunt evidente:

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

a_2. Dacă O este ortocentrul triunghiului, relaţia (1) devine:

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$

iar (2) devine:

$$\operatorname{cotg}A\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}B\operatorname{cotg}C+\operatorname{cotg}C\operatorname{cotg}A=1;$$

am obținut astfel două relații trigonometrice cunoscute.

Dacă notăm:

$$AA_1 = h_a \ldots OA_1 = h_a'' \ldots AO = h_a'$$

relațiile (1) și (2) devin (când O este ortocentrul):

$$a \cdot h_a' + b \cdot h_b' + c \cdot h_c' = 4S.$$

$$a \cdot h_a'' + b \cdot h_b'' + c \cdot h_c'' = 2S$$

(Problema 783 R. M. T.)

a_3. Dacă O este centrul cercului ABC relația (1) devine:

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} = \frac{2}{R}, \text{ unde } d_a = AA_1 \ldots.$$

(Problema 3159. G. M.).

CEZAR COSNITA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXV, N° 10, Iunie 1930. + *Traian A. Dordea*, de Ing. *Ion S. Antoniu*. Sur le Théoréme de *Feuerbach*, de *V. Thébault*. Câteva triunghiuri speciale, de + *V. Cristescu*.

2. *Revista Universitară Matematică*, 1_3, redactată de *Rodolphe Raclis*. Remarques sur les transformations ponctuelles au voisinage d'un point où le jacobien est nul, par *Gaston Julia*. Câteva cuvinte în legătură cu lecțiile d-lui *Paul Montel*, par *George Călugăreanu*. Chestiuni de examen, enunțuri și soluțiuni, de la Facultatea de Științe din București.

3. *G. Papelier*. Éléments de trigonométrie sphérique. (Paris, Librairie Vuibert, (20 fr.).

4. *Rodolphe Nicolas Raclis. (Thése)*. Solution principal de l'équation aux différences finies de Poincarè.

5. *V. Vâlcovici*. Sur un probléme mixte. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences).

PROBLEME REZOLVATE

754. — *Se consideră un triunghiu oarecare* ABC *înscris în cercul* O *și fie* A_1, B_1, C_1 *picioarele înălțimelor sale, iar* A', B', C' *punctele unde* AO, BO, CO *taie pe* BC, CA, AB. *Se consideră următoarele puncte de intersecție:* $M \equiv (BB', CC_1)$; $N \equiv (CC', AA_1)$; $P \equiv (AA', BB_1)$; $M' \equiv (BB_1 CC')$; $N' \equiv (CC_1, AA')$; $P' \equiv (AA_1, BB')$. *Să se demonstreze că:*

1°. *Dreptele* AM, BN, CP *sunt concurente.*

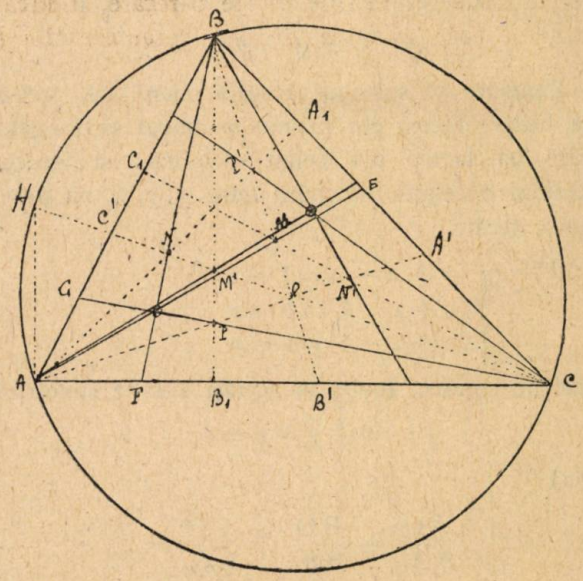
2°. *Dreptele* AM', BN', CP' *sunt concurente.*

3°. *Triunghiurile* OM'P, ON'M, OP'N *sunt isoscele.*

Să se arate că primele două puncte ale problemei subzistă și în cazul când în loc de înălțimile lui ABC *și dreptele* AO, BO, CO, *considerăm două grupuri de ceviene oarecare.*

CEZAR COSNITA

1°. Fie E, F, G intersecția dreptelor AM, BN, CB cu laturile triunghiului ABC.



Aplicăm teorema lui *Ceva* pe rând grupurilor de ceviene:

$$AE, BB', CC_1; BF, CC', AA_1; CC_1, AA', BB_1$$

și avem:

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = -1, \quad \frac{FC}{FA} \cdot \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} = -1,$$

$$\frac{GA}{GB} \cdot \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = -1$$

Inmulțind aceste relațiuni, avem:

$$(1) \qquad \frac{EB}{EC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{GA}{GB} \cdot \left(\frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{A'B}{A'C}\right) \cdot \left(\frac{C_1A}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A}\right) = -1$$

Cum grupele de drepte: AO, BO, CO, precum

și AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente, rezultă după teorema lui *Ceva*, că valoarea fiecarei paranteze din (1) este -1, și atunci rezultă:

$$\frac{EB}{EC}\cdot\frac{FC}{FA}\cdot\frac{GA}{GB}=-1,$$

ceia ce dovedește că drepte AE, BF, CG sau ceia ce este tot una AM, BN, CP sunt concurente.

2°. Demonstrație analoagă.

Se vede ușor că punctele 1° și 2° pe care le-am stabilit subzistă și în cazul când în loc de înălțimele lui ABC și dreptele AO, BO, CO considerăm două grupuri de cevine oarecare, fiind că și în acest caz, valoarea fiecărei paranteze din (1) este -1.

3°. Fie H intersecția lui CC' cu cercul O. Observăm ușor că $HA \perp AC$ și $BB_1 \perp AC$, deci urmează că triunghiurile OAH și $OM'P$ sunt asemenea și cum OAH este isoscel, rezultă că și $OM'P$ este isoscel. Pentru celelalte două triunghiuri, demonstrația este analoagă.

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petre* (Caransebeș) *Ghișoiu I. Petre* (Lic. Spiru-Haret, București), *Marineanu Traian* (student, București) și *Vâlceanu Justin* (Șc. Polit. Timișoara).

759. — *Se cere cubul perfect de cinci cifre, astfel ca cifra a patra să fie rădăcina patrată a numărului format de cifra întâia și a treia, ultimă cifră să fie rădăcina patrată a numărului format de cifrele a treia și a patra, iar suma cifrelor cubului să fie un număr prim.*

I. ILIUTA-DABULENI

Fie $abcde$ cubul perfect cerut. Conform enunțului avem:

$$(1)\quad \begin{cases} d^2 = ac \\ e^2 = cd \\ a+b+c+d+e = \text{prim} \end{cases}$$

Din prima egalitate rezultă:

$$d = 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

1°. Dacă, $d=4$, rezultă din (1):

$$a=1,\quad c=6,\quad e=8,$$

astfel că numărul cerut ar putea fi de forma:

$$1b648$$

Suma cifrelor fiind un număr prim, rezultă:

$$b=0,\ 4.$$

Numărul ar putea fi:

10648 sau 14648

Cum numai 10648 este cub perfect:

$$10648 = 22^3,$$

rezultă că el este o soluție a problemei:

2°. Dacă, $d=5$, din (1) rezultă:

$$a=2,\quad c=5,\quad e^2=55$$

cum 55 nu-i patrat perfect, n'avem în acest caz soluție pentru problemă.

3°. Dacă, $d=6$, din (1) rezultă:

$$a=3,\quad c=6,\quad e^2=66$$

cum 66 nu-i patrat perfect, n'avem soluție.

4°. Dacă, $d=7$, din (1) rezultă:

$$a=4,\quad c=9,\quad e^2=97.$$

97 nu-i patrat perfect, deci n'avem soluție pentru problemă.

5°. Dacă, $d=8$, din (1) rezultă:

$$a=6,\quad c=4,\quad e^2=48$$

48 nu-i patrat parfect, deci n'avem pentru problemă, soluție.

6°. Dacă, $d=9$. din (1) rezultă:

$$a=8,\quad c=1,\quad e^2=19$$

19 nu-i patrat perfect, deci problema în acest caz n'are soluție.

Din cercetarea cazurilor de mai sus, rezultă că singura soluție a problemei este numărul 10648.

Soluții date de d-nii: *Bolgar V. D-tru* (Lic. Oltenița), *Drăguț G. Vasile* (Lic. Târgoviște), *Georgescu Talemac Petru* (Lic. T.-Severin), *Jonescu Gh. Ioan* (Lic. Milit., Tg. Mureș) și *Știopu Porfir* (Lic. Caransebeș).

878. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 \operatorname{arc\,tg} x_1}{k_1} = \dfrac{a_2 \operatorname{arc\,tg} x_2}{k_2} = \ldots = \dfrac{a_n \operatorname{arc\,tg} x_n}{k_n} \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3}+\ldots+ \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}+x_n-x_{n-2}x_{n-1}x_n}{1-x_{n-2}x_{n-1}-x_{n-2}x_n-x_{n-1}x_n} = k_{n+1}\pi, \end{cases}$$

unde $n=3p$, *iar* $a_1, a_2 \ldots a_n, k_1, \ldots k_{n+1}$ *pot avea una din valorile* $1, 2, \ldots n$.

ION MARGINEANU

Notând:

$$\operatorname{arc\,tg} x_i = u_i, \quad (i = 1, 2, \ldots . n),$$

deducem:

$$x_i = \operatorname{tg} u_i$$

Ţinând seamă şi de faptul că:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x_\alpha + x_\beta + x_\gamma - x_\alpha x_\beta x_\gamma}{1 - x_\alpha x_\beta - x_\beta x_\gamma - x_\gamma x_\alpha} = u_\alpha + u_\beta + u_\gamma,$$

α, β, γ având una din valorile $1, 2, \ldots n$, sistemul dat se poate scri astfel:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{\dfrac{k_1}{a_1}} = \dfrac{u_2}{\dfrac{k_2}{a_2}} = \ldots = \dfrac{u_n}{\dfrac{k_n}{u_n}} \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n = k_{n+1}\pi \end{cases}$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor şi ţinând seamă de ultima ecuaţie, deducem uşor:

$$u_i = \frac{k_i k_{n+1} \pi}{a_i \left(\dfrac{k_1}{a_1} + \dfrac{k_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{k_n}{a_n} \right)}, \quad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \; x_i = \operatorname{tg} \frac{k_i k_{n+1} \pi}{a_i \left(\dfrac{k_1}{a_1} + \dfrac{k_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{k_n}{a_n} \right)}, \quad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

Condiţia $n = 3p$, se poate inlocui prin una mai simplă, anume $n > 2$.

Caz particular. Dacă:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = k_1 = k_2 \ldots = k_{n+1} = 1,$$

atunci rezultă:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

Soluţii date de d-nii: *Băcicov Boris* (bacal., Tighina), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (Lic. Carol, Craiova), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), şi *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita).

880. — *Să se afle cel mai mic număr de patru cifre care se poate descompune într'un produs de trei factori primi, a căror sumă este 200.*

V. Alaci

Numărul căutat N, este de forma:

$$N = a \times b \times c,$$

unde a, b, c sunt primi şi satisfac relaţia:

$$a + b + c = 200$$

Unul din numerile prime a, b, c trebuie să fie par şi cum singurul număr prim par este 2, urmează că unul din cele trei numere, de exemplu a este egal cu 2.

Atunci:

$$(1) \qquad b + c = 198$$

Numerile b şi c nu pot fi pare căci fiind prime, fiecare ar fi 2 şi relaţia (1) nu-i satisfăcută.

Numerile b şi c sunt deci impare şi fiind prime, terminaţiile lor pot fi respectiv 1, 7; 3, 5 sau 9,9.

In aceste condiţii b şi c pot fi respectivi:

b	1	31	41	61	71	101	131	151	181	191
c	197	167	157	137	127	97	67	47	17	7

Apoi:

$$b = 5$$

$$c = 193$$

şi:

b	19	59	89
c	179	139	109

Luând pentru a, b, c valorile găsite şi anume numai pe acelea pentru care:

$$N = a \times b \times c$$

este de patru cifre, găsim că N ar putea fi:

$$2 \times 181 \times 17 = 6154, \quad 2 \times 191 \times 7 = 2674,$$

$$2 \times 5 \times 193 = 1930, \quad 2 \times 19 \times 179 = 6802$$

Cel mai mic dintre acestea este 1930, care răspunde la toate condiţiile problemei.

Soluţii date de d-nii: *Băcicov B.* (bacalaureat, Tighina), *Cincilian Agop* (Balcic), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Firoiu Ioan* (Lic. Arad), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit, Bucureşti), *Grinberg Meer* (Lic. Tighina), *Lupescu C-tin* (Lic, Roman), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bu- cureşti), *Mihăilescu Nicolae* (Lic. Constanţa), *Parepeanu Ioan* (Lic. Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă Anton* (Lic. Braşov) şi *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa).

884. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(x + i\sqrt{x^2 - a^2})^n - (x - i\sqrt{x^2 - a^2})^n = 0, \quad (i = \sqrt{-1})$$

Cezar Cosnita

Ecuaţia se poate scri:

(1) $$\left(\frac{x+i\sqrt{x^2-a^2}}{x-i\sqrt{x^2-a^2}}\right)^n = 1 = e^{2ki\pi},$$

căci conform formulei lui *Euler* avem:

$$e^{2ki\pi} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi = 1.$$

Extrăgând din (1) rădăcina n^a, avem:

$$\frac{x+i\sqrt{x^2-a^2}}{x-i\sqrt{x^2-a^2}} = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$$

Aplicând o proprietate a proporțiilor, avem:

$$\frac{x}{i\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{e^{\frac{2ki\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ki\pi}{n}}-1}$$

$$** \quad \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{2}}{\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{\frac{-ik\pi}{n}}}{2i}} = \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}$$

Ridicând la patrat; avem:

$$\frac{x^2}{x^2-a^2} = \frac{\cos^2\frac{k\pi}{n}}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}$$

Aplicând iarăși o proprietate cunoscută, găsim:

$$\frac{2x^2-a^2}{a^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{k\pi}{n}-\sin^2\frac{k\pi}{n}} =$$

$$\frac{1}{\cos\frac{2k\pi}{n}} = \sec\frac{2k\pi}{n}$$

$$** \quad x = \pm a\sqrt{\frac{1+\sec\frac{2k\pi}{n}}{2}}, (k=0,1,2,..n-1)$$

Soluții date de d-nii: *Băcicov B.* (bacalaureat, Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Marcu Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emil*, *Mihăileanu N. Nicolae* (Lic. Constanța), *Negrea A. Mircea* (stud. București) și *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit. Timișoara).

Observare. Foarte mulți corespondenți au găsit numai soluția $x = \pm a$, de aceia nu sunt menționați.

885. — *Se cere limita expresiunii:*

$$E = \frac{\sqrt[m]{(a\sin x)^p} - \sqrt[m]{(a-b\cos x)^p}}{\sqrt[n]{(a-b\cos x)^q} - \sqrt[n]{(a\sin x)^q}},$$

pentru $x = \frac{\pi}{2}$.

JUSTIN N. VALCEANU

Prima soluție. Notând:

(1) $$\sqrt[mn]{a\sin x} = A, \quad \sqrt[mn]{a-b\cos x} = B,$$

putem scri succesiv:

$$E = -\frac{A^{np}-B^{np}}{A^{mq}-B^{mq}}$$

$$= -\frac{(A-B)(A^{np-1}+A^{np-2}B+..+B^{np-1})}{(A-B)(A^{mq-1}+A^{mq-2}B+..+B^{mq-1})}$$

$$= -\frac{A^{np-1}+A^{np-2}B+..+B^{np-1}}{A^{mq-1}+A^{mq-2}B+..+B^{mq-1}}$$

Trecem acum la limită pentru $x = \frac{\pi}{2}$ și observând din (1), că:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} A = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} B = a^{\frac{1}{mn}},$$

rezultă:

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} E = -\frac{np\,a^{\frac{np-1}{mn}}}{mq\,a^{\frac{mq-1}{mn}}} = -\frac{np}{mq}a^{\frac{np-mq}{mn}}$$

Soluția 2ª. Expresiunea E, pentru $x = \frac{\pi}{2}$ luând forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, aplicăm teorema lui *Hôpital*

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} E = \lim_{x=\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(a\sin x)^{\frac{p}{m}} - (a-b\cos x)^{\frac{p}{m}}}{(a-b\cos x)^{\frac{q}{n}} - (a\sin x)^{\frac{q}{n}}} =$$

$$\lim_{x=\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\frac{p}{m}(a\sin x)^{\frac{p}{m}-1}a\cos x - \frac{p}{m}(a-b\cos x)^{\frac{p}{m}-1}.b\sin x}{\frac{q}{n}(a-b\cos x)^{\frac{q}{n}-1}b\sin x - \frac{q}{n}(a\sin x)^{\frac{q}{n}-1}a\cos x}$$

$$= \frac{-\frac{p}{m}a^{\frac{p}{m}-1}b}{\frac{q}{n}a^{\frac{q}{n}-1}b} = -\frac{np}{mq}a^{\frac{np-mq}{mn}}$$

Soluții analoage date de d-nii: *Cosniță Cezar* (Bârlad), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Grossu I. Mircea* (Lic. Carol, Craiova), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emil* (student), *Negrea A. Mircea* (student, București), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara) și *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit.. Timișoara).

886. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}=2$$

NECULAI TH. DONCIU

Ecuația dată se poate scri:

$$1+\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin 2x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \cos x+\sin x=4\sin x\cos^2 x$$

De aci deducem:

$$\cos x=3\sin x-4\sin^3 x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad \cos x=\sin 3x$$

Mai putem scri:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin 3x$$

Această ecuație trigonometrică este echivalentă cu următoarele două ecuații algebrice:

$$3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x$$

$$3x=2k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

De aci deducem:

$$x=\frac{(4k+1)\pi}{8},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots..$$

$$x=\frac{(4k+1)\pi}{4},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots..$$

Soluții date de d-nii: *Băcicov B.* (bacalaureat, Tighina), *Chirilă Gheorghe* (Lic. Milit., Iași), *Crivăț I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, București), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Diaconescu Al. Savel* (Șc. Polit., Timișoara), *Dimitriu At.-Ioan* (Șc. Polit., București), *Firoiu Ioan* (Lic. Arad), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Grecu M. Cristache* (Lic. Oltenița), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenița), *Lupescu C-tin* (Lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Marșieu Teodor* (Șc Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (student), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanța), *Negrea A. Mircea* (student, București), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Parepeanu Ioan* (Lic. Brașov), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenița), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Purdilă Anton* (Lic. Brașov), *Rusu D. Costică* (Lic. Constanța), *Titu Vel.* (Lic. Matei-Basarab, București) și *Vasiliu Alexandru* (Lic. Național, Iași).

PROBLEME PROPUSE

921. — Patratul, sumei patratelor a două numere consecutive, se poate descompune într'o sumă de două patrate și aceste două patrate sunt numere prime ele.

V. ALACI

922. — Un automobil merge pe o șosea cu viteză uniformă. Dealungul șoselei sunt înșirați stâlpi de telegraf la câte 50 m. După cât timp numărul intervalelor parcurse dintre stâlpi, este egal cu numărul care reprezintă viteză în Km/oră a automobilului.

ION PROTOPOPESCU

923. — Fie A_1, B_1, C_1 picioarelor înălțimelor triunghiului ABC. Perpendicularele duse din B_1 pe AB și BC intersectează înălțimile duse din A și C în M și N. Să se demonstreze că:

1°. Patrulaterul C_1MNA_1 este trapez.

2°. Mijloacele laturilor paralele ale trapezului se găsesc pe BB_1.

3°. În triunghiurile echilaterale, trapezul considerat este dreptunghiu.

VLADIMIR I. CRIVAT

924. — Să se construiască un triunghiu pentru care sunt cunoscute:

1°. Cercul său circumscris O.

2°. Dreapta centrelor cercurilor circumscris și al celor nouă puncte ale sale.

3°. Un punct al cercului celor nouă puncte. Discuțiune.

OVIDIU ȚINO

925. — Înălțimele triunghiului isoscel ABC ($\sphericalangle A=\sphericalangle B$) se întâlnesc în M; punctele de contact ale acestor înălțimi, cu laturile opuse, sunt D, E, O. Se prelungește CO cu cantitatea $CF=MO$. Să se arate că:

1°. $\dfrac{\overline{BM}\cdot\overline{BE}}{\overline{MO}\cdot\overline{CO}}=2$

2°. $\overline{BM}^2=\overline{OF}\cdot\overline{MO}$

3°. $\overline{BF}^2=\overline{BC}^2+\overline{BM}^2+\overline{BO}^2$

ION MARGINEANU

926. — Să se stabilească identitatea:

$$\Sigma(x-y)(x+y+2z-2)(x+y+1)^2\equiv 4(z-x)(z-y)(x-y)$$

CEZAR COSNITA

INFORMAȚIUNI

D. Georgescu, profesor. *Culegere de Probleme pentru bacalaureat și Cursul Superior de Liceu.* (Cuprinde, 402 probleme cu soluțiile lor, din care peste 300 au fost propuse la examenul de bacalaureat din Iunie și Septembrie 1929). Pitești, prețul 120 lei.

Ing. Radu Criveanu și *I. B. Florescu. Probleme de matematici pentru bacalaureat, după programa analitică actualmente în vigoare.*

Enunțuri și soluțiuni complecte, prețul 80 lei.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu.*

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 AUGUST 1930 NO. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COSNIȚA CATEVA PROPRIETATI IN LEGATURA CU TRANSVERSALELE IN TRIUNGHIURI
2. NOTE MATEMATICE: 14, 15
3. EXAMENUL DE MATEMATICI GENERALE ANUL PREGATITOR
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 811, 818, 836, 881, 883, 887, 888, 891, 892, 894, 895
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească“

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 6 TIMISOARA, 15 AUGUST 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

CATEVA PROPRIETAȚI IN LEGATURA CU TRANSVERSALELE IN TRIUNGHIURI

de CEZAR COSNITA

Vom expune in cele ce urmează, câteva proprietăți ale transversalelor în triunghiuri, proprietăți pe care le-am găsit pe diferite căi, propunându-mi să le soluționez direct, cu ajutorul teoremelor lui *Ceva* și *Menelaus*.

I. *Fie un triunghiu oarecare* A B C, B′, C′ *două puncte arbitrare considerate pe laturile* C A, A B *iar* A_1 *mijlocul lui* B C.

Paralela dusă din A *la* B C *întâlnește pe* B′ C′ *în* M; *dreptele* A_1 C′, A_1 B′ *întâlnesc pe* C A, A B *în* N, P.

Punctele M, N, P *sunt colineare.*

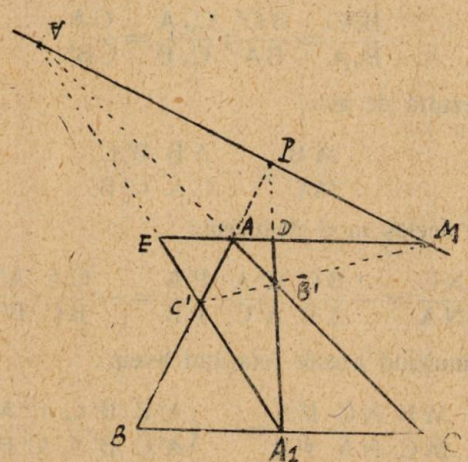


Fig. 1.

Soluțiune: Paralela dusă prin A la B C tae dreptele A_1B', A_1C' în punctele D, E. Observăm că triunghiul A_1 D E (fig. I) este tăiat de transversalele: M B′ C′, N A B′, P A C′. Aplicând de trei ori teorema lui *Menelaus*, avem relațiunile următoare:

$$\frac{MD}{ME}\cdot\frac{C'E}{C'A_1}\cdot\frac{B'A_1}{B'D}=+1;\ \frac{NE}{NA_1}\cdot\frac{B'A_1}{B'D}\cdot\frac{AD}{AE}=+1;\ \frac{PA_1}{PD}\cdot\frac{AD}{AE}\cdot\frac{C'E}{C'A_1}=+1.$$

Inmulțând aceste relațiuni avem:

$$(1)\qquad \frac{MD}{ME}\cdot\frac{NE}{NA_1}\cdot\frac{PA_1}{PD}\cdot\frac{\overline{C'E}^2\cdot\overline{B'A_1}^2\cdot\overline{AD}^2}{\overline{C'A_1}^2\cdot\overline{B'D}^2\cdot\overline{AE}^2}=+1,$$

Examinând triunghiurile asemenea cari s'au format pe figură, deducem imediat relațiunile:

$$\frac{C'E}{C'A_1}=\frac{AE}{A_1B};\ \frac{B'A_1}{B'D}=\frac{A_1C}{AD},$$

cari ridicate la patrat și apoi înmulțite ne dau:

$$\frac{\overline{C'E}^2\cdot\overline{B'A_1}^2\cdot\overline{AD}^2}{\overline{C'A_1}^2\cdot\overline{B'D}^2\cdot\overline{AE}^2}=+1.$$

Relațiunea (1) devine:

$$\frac{MD}{ME}\cdot\frac{NE}{NA_1}\cdot\frac{PA_1}{PD}=+1,$$

deci punctele M, N, P sunt colineare.

II. *Fie* A B C *un triunghiu oarecare și* Q *un punct în planul său; fie* A′ B′ C′ *triunghiul pedal al punctului* Q *față cu* A B C, *iar* $\alpha\beta\gamma$, *anticomplementarul lui* A B C.

Triunghiurile $\alpha\beta\gamma$, A′ B′ C′ *sunt homologice.*

Soluțiune: Voiu dovedi că laturile corespunzătoare ale celor două triunghiuri se tae în trei puncte colineare.

Latura B′ C′ întâlnește laturile $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ respectiv în M, β_a, γ_a; în acelaș mod se obțin punctele N. γ_b, α_b; P, α_c, β_c. Să dovedim că M, N, P sunt colineare (fig. II).

Considerăm triunghiul A′ B′ C′ tăiat de transversalele $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ și aplicând teorema lui *Menelaus* avem:

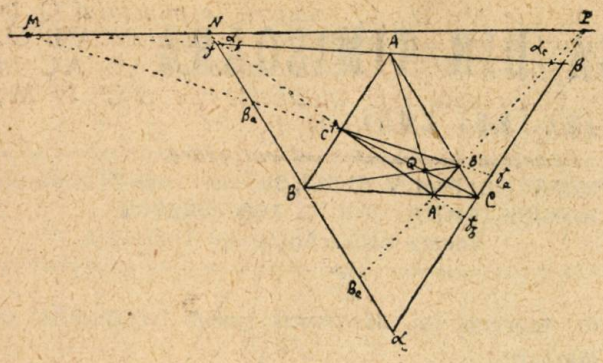


Fig. 2.

$$\frac{MB'}{MC'}\cdot\frac{\alpha_b C'}{\alpha_b A'}\cdot\frac{\alpha_c A'}{\alpha_c B'}=+1\,;\frac{NC'}{NA'}\cdot\frac{\beta_c A'}{\beta_c B'}\cdot\frac{\beta_a B'}{\beta_a C'}$$

$$=+1\,;\frac{PA'}{PB'}\cdot\frac{\gamma_a B'}{\gamma_a C'}\cdot\frac{\gamma_b C'}{\gamma_b A'}=+1.$$

Observând triunghiurile asemenea cari s'au format, avem relaţiunile:

$$\frac{\alpha_b C'}{C'A'}=\frac{AC'}{C'B}\,;\frac{B'A'}{\alpha_c B'}=\frac{CB'}{B'A},$$

din cari deducem:

$$\frac{\alpha_b C'}{\alpha_b C'+C'A'}=\frac{AC'}{AC'+C'B}\overset{**}{=}\frac{\alpha_b C'}{\alpha_b A'}=\frac{AC'}{AB}.$$

$$\frac{\alpha_c B'+B'A'}{\alpha_c B'}=\frac{B'A+CB'}{B'A}\overset{**}{=}\frac{\alpha_c A'}{\alpha_c B'}=\frac{CA}{B'A}.$$

Rezultă de aici:

$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{B'A}{AC'}\cdot\frac{AB}{CA}=-\frac{B'A}{C'A}\cdot\frac{AB}{CA}.$$

In acelaş mod găsim:

$$\frac{NC'}{NA'}=-\frac{C'B}{A'B}\cdot\frac{BC}{AB}\,;\frac{PA'}{PB'}=-\frac{A'C}{B'C}\cdot\frac{CA}{BC}.$$

Inmulţind ultimile trei relaţii avem:

$$\frac{MB'}{MC'}\cdot\frac{NC'}{NA'}\cdot\frac{PA'}{PB'}=-\left(\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}\right)$$

$$=(-1)(-1)=+1,$$

deci punctele M, N, P, sunt colineare.

III. *Fie* A_1, B_1, C_1 *simetricile punctului* Q *în raport cu mijloacele laturilor triunghiului* ABC. *Dreptele* BA_1, CA_1 *întâlnesc pe* CA, AB *în* B_a, C_a; *în acelaş mod se obţin punctele:* C_b, A_b; A_c, B_c. *Dreptele* B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c *întâlnesc laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

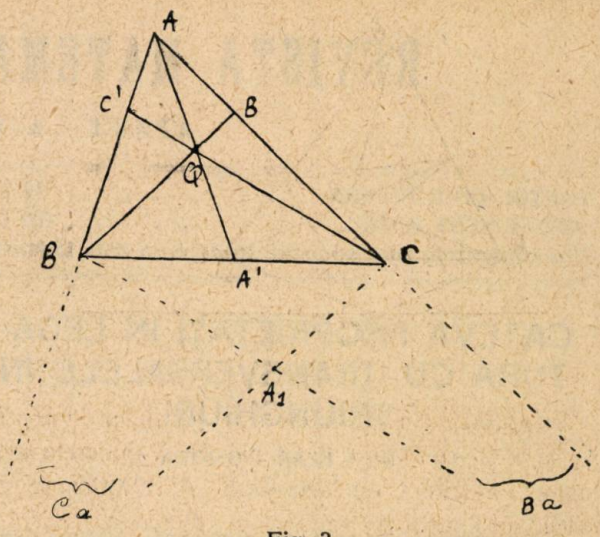


Fig. 3.

Soluţiune: Notăm cu M intersecţia lui BC cu B_aC_a şi cu N, P punctele analoage. Triunghiul ABC tăiat de transversalele B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c ne dă relaţiunile:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{B_aC}{B_aA}\cdot\frac{C_aA}{C_aB}=+1\,;\frac{NC}{NA}\cdot\frac{C_bA}{C_bB}\cdot\frac{A_bB}{A_bC}$$

$$=+1\,;\frac{PA}{PB}\cdot\frac{A_cB}{A_cC}\cdot\frac{B_cC}{B_cA}=+1.$$

Examinând figura III, deducem relaţiile:

$$\frac{B_aC}{B_aA}=\frac{BC'}{BA}\,;\frac{C_aA}{C_aB}=\frac{CA}{CB'}.$$

Rezultă de aici:

$$\frac{MB}{MC}=-\frac{AB}{CA}\cdot\frac{B'C}{C'B}$$

şi în acelaş mod deducem:

$$\frac{NC}{NA}=-\frac{BC}{AB}\cdot\frac{C'A}{A'C}\,;\frac{PA}{PB}=-\frac{CA}{BC}\cdot\frac{A'B}{B'A}$$

Inmulţind aceste relaţiuni avem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=-\left(\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}\right)$$

$$=(-1)(-1)=+1,$$

deci punctele M, N, P sunt colineare.

IV. *Paralelele duse prin* A_1, B_1, C_1 *la* BC, CA, AB *întâlnesc laturile* B'C', C'A', A'B' *în trei puncte colineare.*

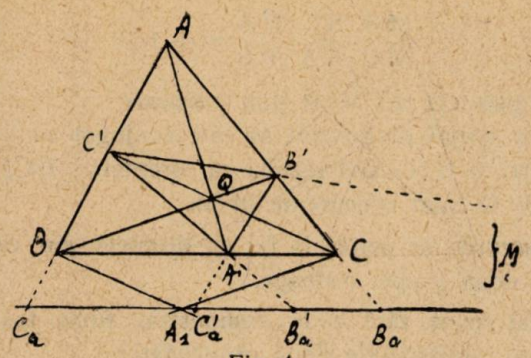


Fig. 4.

Soluțiune: Fie M intersecția paralelei dusă prin A_1 la BC, cu latura B'C', iar N, P punctele analoage. Laturile CA, AB, C'A', A'B' întâlnesc paralela dusă prin A_1 la BC, în punctele: B_a, C_a, B'_a, C'_a. Avem în primul rând relațiunea:

$$\frac{MB'}{MC'}\cdot\frac{B'_aC'}{B'_aA'}\cdot\frac{C'_aA'}{C'_aB'}=+1.$$

Observăm apoi (fig. IV) că avem:

$$\frac{B'_aC'}{B'_aA'}=\frac{C_aC'}{C_aB} \text{ și: } \frac{BC'}{C_aB}=\frac{CC'}{A_1B},$$

de unde rezultă:

$$\frac{C_aB+BC'}{C_aB}=\frac{A_1B+CC'}{A_1B} \overset{*}{**} \frac{B'_aC'}{B'_aA'}=$$

$$\frac{C_aC'}{C_aB}=\frac{CQ+CC'}{CQ}.$$

Avem deasemenea:

$$\frac{C'_aA'}{C'_aB'}=\frac{B_aC}{B_aB'} \text{ și: } \frac{B_aC}{CB'}=\frac{A_1C}{BB'},$$

de unde rezultă:

$$\frac{B_aC}{B_aC+CB'}=\frac{A_1C}{A_1C+BB'}$$

$$\overset{*}{**}\frac{C'_aA'}{C'_aB'}=\frac{B_aC}{B_aB'}=\frac{BQ}{BQ+BB'}.$$

Rezultă că avem:

$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{BQ+BB'}{BQ}\cdot\frac{CQ}{CQ+CC'}$$

și în mod analog:

$$\frac{NC'}{NA'}=\frac{CQ+CC'}{CQ}\cdot\frac{AQ}{AQ+AA'};$$

$$\frac{PA'}{PB'}=\frac{AQ+AA'}{AQ}\cdot\frac{BQ}{BQ+BB'},$$

de unde:

$$\frac{MB'}{MC'}\cdot\frac{NC'}{NA'}\cdot\frac{PA'}{PB'}=+1,$$

deci punctele M, N, P sunt colineare.

V. *Fie* A'_1, B'_1, C'_1 *simetricile punctului* Q *în raport cu mijloacele laturilor triunghiului* A'B'C'. *Dreptele* $B'A'_1$, $C'A'_1$ *întâlnesc pe* AB, AC *în* D, E. *Dreapta* DE *întâlnește pe* B'C' *în* M; *analog avem punctele* N, P.

Punctele M, N, P *sunt colineare.*

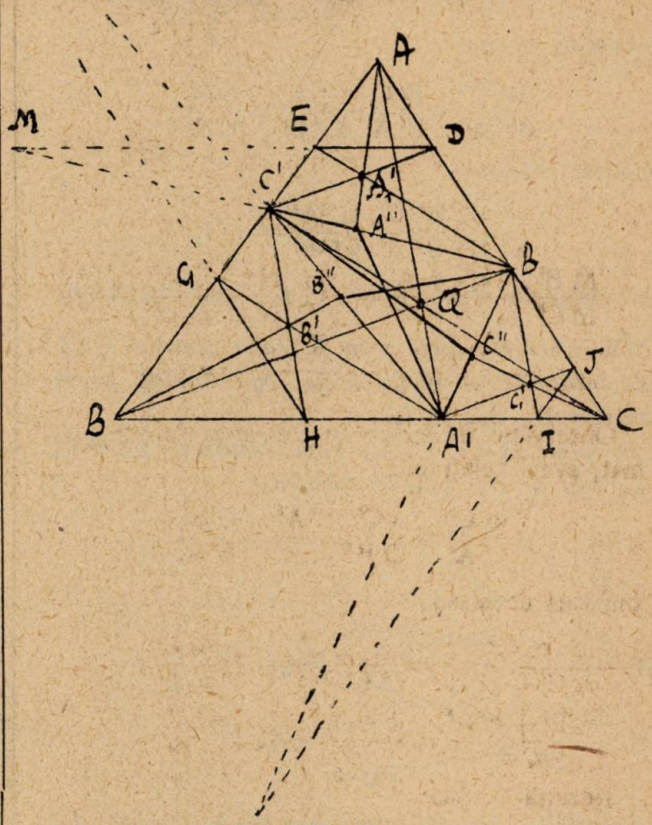


Fig. 5.

Soluțiune: Avem relațiunea:

$$\frac{MB'}{MC'}\cdot\frac{EC'}{EA}\cdot\frac{DA}{DB'}=+1.$$

Dar pe figura V avem:

$$\frac{EC'}{EA}=\frac{B'C}{B'A}:\frac{DA}{DB'}=\frac{C'A}{C'B}.$$

Relațiunea precedentă devine:

$$\frac{MB'}{MC'}=\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}=-\frac{A'B}{A'C}$$

și analog:

$$\frac{NC'}{NA'}=-\frac{B'C}{B'A};\frac{PA'}{PB'}=-\frac{C'A}{C'B}.$$

Prin înmulțire deducem:

$$\frac{MB'}{MC'}\cdot\frac{NC'}{NA'}\cdot\frac{PA'}{PB'}=(-1)(-1)=+1,$$

deci punctele M, N, P sunt colineare.

VI. *Dreapta* AA'_1 *întâlnește pe* B'C' *în* A''; *la fel obținem punctele* B'', C''. *Dreptele* A'A'', B'B'', C'C'' *sunt concurente.*

Soluțiune: Pe figură se vede că punctul A'' este conjugatul armonic al punctului M față cu punctele B', C'; avem deci:

$$\frac{A''B'}{A''C'} = -\frac{MB}{MC} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Analog avem:

$$\frac{B''C'}{B''A'} = \frac{B'C}{B'A}; \frac{C''A'}{C''B'} = \frac{C'A}{C'B},$$

de unde rezultă:

$$\frac{A''B'}{A''C'} \cdot \frac{B''C'}{B''A'} \cdot \frac{C''A'}{C''B'} = -1,$$

deci dreptele $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sunt concurente

VII. *Paralele duse prin* A *la cevianele* CC', BB' *întâlnesc pe* B'C' *în* A_b. A_c. *Analog avem punctele* B_c, B_a; C_a C_b.

Dreptele B_c C_b, C_a A_c, A_b B_a *întâlnesc pe* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

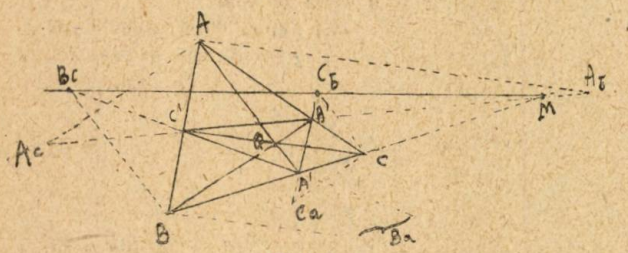


Fig. 6.

Soluțiune: Fie M intersecția lui BC cu B_c, C^b și N, P celelalte două puncte analoage (fig. VI). In triunghiurile asemenea cari s'au format, avem:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{BB_c}{CC_b}; \frac{BB_c}{A'A} = \frac{BC'}{C'A}; \frac{CC_b}{A'A} = \frac{CB'}{B'A}$$

$$\frac{BB_c}{CC_b} = \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{B'A}{CB'}.$$

Sau:

$$\frac{BB_c}{CC_b} = \frac{C'B}{C'A} \cdot \frac{B'A}{B'C} = -\frac{A'B}{A'C}.$$

Rezultă că avem:

$$\frac{MB}{MC} = -\frac{A'B}{A'C}.$$

Pe ultima relațiune cetim că punctele A', M sunt conjugate în raport cu B, C. La fel se arată că B', N sunt conjugate în raport cu C, A iar C', P n raport cu A, B. Rezultă imediat:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = +1,$$

deci punctele M, N, P sunt colineare.

Din faptul că punctul M este conjugat cu A' în raport cu B, C mai rezultă că dreptele: BC, B_c C_b, B' C' sunt concurente în M.

Lucrurile se petrec la fel cu dreptele din celelalte două grupe analoage.

Mai enunț, fără a le demonstrà, fiind foarte simple, următoarele două proprietăți:

VIII. *Paralelele duse din* A' *la* AB, AC *tae pe* CC', BB' *în* A'_c, A'_b; *analog avem punctele:* B'_a, B'_c; C'_b C'_a. *Paralelele duse tot prin* A' *la* BB', CC' *întâlnesc pe* CC', BB' *în* A''_c, A''_b; *analog avem punctele:* B''_a, B''_c; C''_b, C''_a.

1°. *Dreptele* $A'_c A'_b$, $B'_a B'_c$, $C'_b C'_a$ *tae pe* AC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

2°. *Dreptele* $A''_c A''_b$, $B''_a B''_c$, $C''_b C''_a$ *tae pe* BC, CA, AB *tot în trei puncte colineare.*

IX. *Fie intersecțiile:* $M' \equiv (BA'_c, CA'_b)$, $N' \equiv (CB'_a, AB'_c)$, $P' \equiv (AC'_b BC'_a)$; $M'' \equiv (BA''_c, CA''_b)$, $N'' \equiv (CB''_a, AB''_c)$, $P'' \equiv (AC''_b, BC''_a)$. *Dreptele* QM', QN', QP' *întâlnesc pe* BC, CA, AB *în* M'_a, M'_b, M'_c: *dreptele* QM'', QN'', QP'' *întâlnesc pe* BC, CA, AB *în* M''_a, M''_b, M''_c.

1°. *Dreptele* AM'_a, BM'_b, CM'_c *sunt concurente.*

2°. *Dreptele* AM''_a, BM''_b, CM''_c *sunt deasemenea concurente.*

NOTE MATEMATICE

14. *Asupra problemei 756.*

Voi da o nouă soluție problemei 756 rezolvată în „R. M. T", No. 3 pag. 30, an. IX.

Fie:

$$f(x) = \frac{2x+5}{2(x+3)(x+4)}.$$

Conform formulei:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[f(k) - f(k+1) \right] = f(1) - f(n+1),$$

avem:

$$\sum_{k=1}\left[\frac{2k+5}{2(k+3)(k+4)}=\frac{2(k+1)+5}{2(k+4)(k+5)}\right]=\frac{7}{40}-\frac{2(n+1)+5}{2(n+4)(n+5)}.$$

Efectuând calculele şi simplificând cu 2 căpătăm:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+3)(k+4)(k+5)}=\frac{7}{40}-\frac{2(n+1)+5}{2(n+4)(n+5)}$$

Dacă în această identitate facem $n=\infty$, căpătăm:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{(k+3)(k+4)(k+5)}=\frac{7}{40},$$

acelaş rezultat ca şi la soluţiile dela pagina 30.

SECAROIU DUMITRU.

15. *Asupra problemei 3801.*

In „Gazeta Matematică" — XXXV — 273 este rezolvată problema: *Care sunt patratele* MSZU *în care* SZ *este un patrat?*; prin cincizeci şi şase ridicări la patrat.

In cele ce urmează voiu da o soluţie care nu suferă decât 16 încercări. In sus numita soluţie se găseşte că rădăcinile patrate ale numerelor cerute sunt de forma:

$a1, a2, a3, a4, a6, a7, a8, a9$, ; $a=3,4\ldots.9$.

Vom avea:

$$(10a+1)^2=100a^2+20a+1,$$

cum în acest caz patratele se termină cu: 61 ; 41 avem:

$$a=7\ ,\ 8\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad \underline{5041}\ ,\ 6561.$$

$$(10a+9)^2=100a^2+180a+81$$

patratele se termină cu 41, 61

$${}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad a=7\qquad\qquad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 6241$$

$$(10a+2)^2=100a^2+40a+4\ ,\ (10a+8)^2=100a^2+16a+64,$$

iar patratele se termină cu : 44 , 64.

$${}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad a=4\ ,\ 6\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 3844\ ,\ 1764\ ;$$

$$a=5\ ;\ 8\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 7844,\ \underline{3364}$$

$$(10a+3)^2=100a^2+60a+8\ ,$$

$$(10a+7)^2=100a^2+140a+49,$$

iar patratele se termină cu 49 , 69.

$${}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad a=4\ ,\ 6\ ,\ 9\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 1849,\ 3969,\ \underline{8649},$$

$$a=3\ ;\ 5\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 3249,\ \underline{1369}$$

$$(10a+4)^2=100a^2+80a+16\ ,$$

$$(10a+6)^2=100a^2+120a+36,$$

iar patratele se termină cu : 16 , 56 , 96.

$${}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad a=3\ ,\ 5\ ,\ 6\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 1156,\ 2916,\ \underline{4096},$$

$$a=4\ ,\ 6\ ,\ 9\quad {}^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad 2116,\ 4356,\ 2916.$$

Sunt soluţii cele subliniate, uşor de observat căci SZ = patrat.

HARALAMB P. IONESCU-BISS

EXAMENUL DE MATEMATICI GENERALE ANUL PREGĂTITOR

Sesiunea Iunie 1930.

(Lucrare-scrisă)

I. 1°. Să se studieze variaţia funcţiunii:

$$y=\frac{1}{4}\mathrm{L}\frac{(x-1)^3}{(x+1)(x^2+1)}-\operatorname{arctg}x.$$

şi să se reprezinte curba variaţiunii.

Se va calcula minimul cu două zecimale.

2°. Să se dovedească că există numai două puncte pe curbă în care tangentele fac un unghi de 45° cu axa O X,

3°. Să se calculeze abscisa unuia din aceste puncte cu o aproximaţie de $\frac{1}{100}$.

II. Să se rezolve ecuaţia:

$$f(x)=x^4-5x^3+ax^2-7x+2=0.$$

şi să se determine a (a raţional) ştiind că admite o rădăcină triplă.

(Timpul acordat 3 ore). Ambele chestiuni obligatorii.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXXV. No. 11, Iulie 1930. Sur les triangles métaparalléle, par + *N. Agronomof.* Asupra unei figuri plane variabile care rămâne asemenea cu ea însăşi, de *N. Abramescu.* Calcularea unor determinanţi, de *T. Angheluţă.* O expresie a constantei lui *Euler* ca limită, de *Nicolae Ciorănescu.*

2. *V. Vâlcovici.* Sur les zéros de certains polynomes. (Extrait du Bulletin Scientiphique de l'école Polytechnique de Timişoara).

3. *Tiberiu Popovici.* Sur certains polynomes minisants. (Extrait du Bulletin de l'Académie Roumaine).

4. *Tiberiu Popovici.* Remarque sur les polynomes de meilleure approximation. (Extrait du Bulletin de la Société des Sciences de Cluj).

5. *Tiberiu Popovici.* Sur les indicateurs. (Extrait du Bulletin Scientiphique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara).

6. *Tiberiu Popovici.* Sur les fonctions convexes d'une variable réelle. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences).

PROBLEME REZOLVATE

811. *Știind că cel mai mare comun divizor a șase*[1]) *numere întregi distincte, luate câte trei este 17 și că cel mai mic multiplu comun al lor este 6732, să se afle acele numere.*

VIRGILIU GR. DANCIULESCU.

Descompunem întâi pe 6732 în factori primi, găsim:

$$6732 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 17.$$

Cele șapte numere cerute, conțin factorul 17, care prin definiție este cel mai mare comun divizor al lor.

Numărul 6732, fiind cel mai mic comun multiplu al numerilor cerute, aceste numere se găsesc printre divizorii lui 6732, care conțin și diviziorul 17.

Vom lasa deci la o parte factorul 17 și vom afla toți divizorii numărului:

$$2^2 \times 3^2 \times 11$$

Acești divizori după cele știute, sunt următorii:

1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 11, 22, 44, 33, 66, 132, 99, 198, 396.

Inmulțim acum numerile acestui șir cu 17 și avem:

17	$187 = 17 \times 11$
$34 = 17 \times 2$	$374 = 17 \times 2 \times 11$
$68 = 17 \times 2^2$	$748 = 17 \times 2^2 \times 11$
$51 = 17 \times 3$	$561 = 17 \times 3 \times 11$
$102 = 17 \times 2 \times 3$	$1122 = 17 \times 2 \times 3 \times 11$
$204 = 17 \times 2^2 \times 3$	$2244 = 17 \times 2^2 \times 3 \times 11$
$153 = 17 \times 3^2$	$1683 = 17 \times 3^2 \times 11$
$306 = 17 \times 2 \times 3^2$	$3366 = 17 \times 2 \times 3^2 \times 11$
$612 = 17 \times 2^2 \times 3^2$	$6732 = 17 \times 2^2 \times 3^2 \times 11$

Dintre aceste numere trebuie să alegem șase, astfel ca luate câte trei să aibă cel mai mare comun divizor 17, iar toate împreună să aibă cel mai mare multiplu comun, 6732.

Se impune pentru aceasta a observa ca printre cele șase numere să nu fie trei din ele care să aibă factorul 2 sau 3, căci *c. m. m. d. c.* al lor ar fi 17×2 sau 17×3. Asemenea vom observa ca printre cele șase numere să fie unele care să aibă printre factorii lor pe 2^2, 3^2, 11, afară de factonul 17 care este comun, pentru ca *c. m. m. c. m.* al lor să fie, $17 \times 2^2 \times 3^2 \times 11 = 6732$.

Singura soluție care împlinește aceste condiții, este dată de următoarele șase numere:

$$17,\ 34 = 17 \times 2,\ 68 = 17 \times 2^2,\ 51 = 17 \times 3,$$
$$153 = 17 \times 3^2,\ 187 = 17 \times 11.$$

Observare. Șapte numere care să satisfacă enunțul, nu se pot găsi.

Singura soluție acceptabilă este aceia dată de d-l *Țiucra Mircea* (Șc. Polit. Timișoara).

818. *Se cere patratul perfect de șase cifre așa în cât ultimele trei cifre să fie identice, iar numărul format de ultimele trei cifre scrise după a doua cifră, să fie un patrat perfect.*

NICOLAE PAVEL.

Știind că terminațiile unui patrat perfect, sunt: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, vedem că numai 00 și 44 au cifre identice, deci patratul căutat e de forma:

$$abc\ 000, \text{ sau } abc\ 444.$$

1°. Numărul $abc\ 000$, având 10^3 ca divizor și fiind patrat perfect, trebuie să aibă și pe 10^4, deci numărul cerut ar trebui să fie de forma:

$$(1) \qquad ab\ 0000 = ab \times 10^4$$

Conform enunțului, ar trebui ca numărul $b\,000$ să fie patrat perfect, ceiace ne-ar da $b = 0$.

Pe de altă parte din (1) ar resulta $a0$ patrat perfect, ceiace nu-i posibil, pentru $a \neq 0$.

In acest caz nu avem soluție.

2°. Rămâne să căutăm patratul cerut printre numerile de forma $abc\ 444$.

[1]) Rectificat în loc de șapte, șase.

Contorm enunțului, b 444 trebuie să fie patrat perfect, și găsim că numai 1444 este patrat perfect:

$$1444 = 38^2,$$

deci $b = 1$. Patratul cerut este deci de forma a 1 c 444. Rădăcina patrată a acestor numere este cuprinsă între 332 și 959.

Pe de altă parte, în „*Gazeta Matematică*“ an. XXXIV, No. 7, pag. 252, se găsește că numerile terminate în 44, sunt de forma:

$$50n \pm 12.$$

Trebuie să luăm deci numerile de această formă cuprinse între 332 și 959 și anume:

338, 362, 388, 412, 438, 462, 488, 512, 538, 562, 588, 612, 638, 662, 688, 712, 738, 762, 788, 812, 838, 862, 888, 912, 938.

Ridicând aceste numere la patrat, găsim că numai patratul lui 462, anume:

$$462^2 = 213444,$$

este de forma $a\,1\,c\,444$, deci 213444 este patratul căutat.

Soluții analoage date de d-nii: *Băcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați) și *Ionescu-Țiu D. C-tin.*

Alte soluții, găsite prin mai multe încercări, date de d-nii: *Aldea N.* (absolvent, M-rea Dealu), *Almăjau Petru, Bidoianu I. Adrian* (lic. Oltența), *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Bujoreanu Vicențiu* (lic. Sincai, București), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *David I. Lucian* (Șc. Polit. Timișoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu*‘ *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenița), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Lupescu C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emil* (absolvent, lic. Piatra-Neamț), *Mihăileanu N. Nicolae* (lic. Constanța), *Milea G. Ene* (absolvent, R.-Sărat), *Motoc D. M.* (lic. Oltenița), *Murărou I.* (bacalaureat, Brașov), *Negoescu A. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Patron M.* (lic. Milit., Iași), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Secăroiu D-tru* (absolvent, Brașov), *Serban-Ulmeni* (lic. Oltenița), *Ungheanu Mihail* (lic. Oltenița), și *Țiucra Mircea* (Șc. Polit. Timișoara).

836. *Să se arate că în orice triunghiu avem:*

$$\frac{9}{14}p < m < \frac{5}{4}p,$$

unde m e suma medianelor și p perimetrul triunghiului.

ION MARGINEANU

881. *Să se arate că în oricare triunghiu, avem:*

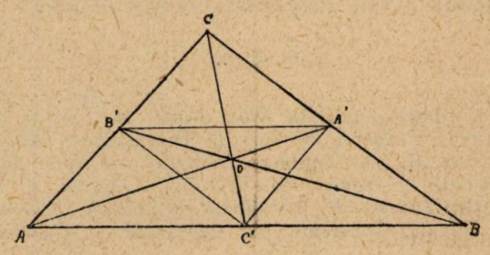
$$\frac{3}{4}p < m < p,$$

unde m este suma medianelor, iar p perimetrul triunghiului dat.

ION MARGINEANU

Vom soluționa numai problema 881, care cuprinde evident și problema 836.

Fie triunghiul ABC și A', B', C' picioarele medianelor, iar O punctul lor de intersecție.



In triunghiurile AOB, BOC, COA, avem respectiv:

$$AB < AO + OB,\ BC < BO + OC,$$
$$AC < AO + OC$$

Adunând aceste inegalități, avem:

$$(1)\quad AB + BC + AC < 2\,(AO + BO + CO)$$

Dar:

$$AO = \frac{2AA'}{3},\ BG = \frac{2BB'}{3},\ CO = \frac{2CC'}{3},$$

iar,

$$AB + BC + AC = p,$$

astfel că inegalitatea (1) se poate scri încă:

$$(2)\qquad p < \frac{4}{3}(AA' + BB' + CC')$$

Cum:

$$AA' + BB' + CC' = m,$$

deducem ușor din (2):

$$\frac{3}{4}p < m$$

Rămâne să mai dovedim că, $m < p$.

Pentru aceasta observăm în triunghiul $A'B'C'$, că:

$$B'A' = \frac{AB}{2},\ C'A' = \frac{AC}{2},\ B'C' = \frac{BC}{2}$$

In triunghiurile $AA'C'$, $BB'A'$, $CC'B'$ putem scri respectiv:

$$AA' < AC' + C'A' = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2}$$

$$BB' < BA' + A'B' = \frac{BC}{2} + \frac{AB}{2}$$

$$CC' < CB' + B'C' = \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}$$

Adunând aceste inegalități, deducem ușor:

$$m < p.$$

Au soluționat problema 836, d-nii: *Antonescu Aurel* (bacalaureat, Focșani), *Băcicov B.* (bacalaureat, Tighina), *Derembaum M.* (lic. Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Georgescu C.* (Craiova), *Ghișoiu I. Petre* (București), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenița), *Scarlat D.* (Școala Navală, Constanța), și *Murăroiu I.* (bacalaureat Brașov).

Au soluționat problema 881, d-nii: *Băcicov Boris* (Tighina), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Derenbaum M.* (lic. Tighina), *Diaconescu Al. Savel* (Șc. Polit. Timișoara), *Marcu Aureliu* (Șc. Polit. Timișoara), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit. Timișoara), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Brașov), *Oelze Emil* (Șc. Polit. Timișoara), *Parepeanu C Jean* (lic. Brașov), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Popovici Gh. Valentin* (lic. Câmpina), *Purdilă Anton* (lic. Brașov), *Remeder Carol* (lic. Național, Iași), și *Ștefănescu Anibal* (lic. Mihai-Viteazul, București).

883. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{17}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{161}{4} \\ z(xy + x + y) + xy = 22 \end{cases}$$

TRAIAN MARINEANU

Ecuația 2-a se poate scri încă:

$$(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + xz) = \frac{161}{4},$$

și ținând seamă de prima, deducem:

$$(1) \qquad xy + yz + xz = 16$$

A treia ecuație a sistemului dat, în virtutea ecuației (1), ne dă:

$$(2) \qquad xyz = 6$$

Sistemul dat este deci echivalent cu următorul:

$$(3) \qquad \begin{cases} x + y + z = \dfrac{17}{2} \\ xy + yz + xz = 16 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Privind pe x, y, z ca rădăcinele unei ecuații de gradul al treilea, egalitățile (3) scriu tocmai relațiile dintre rădăcinele și coeficienții ei, deci această ecuație după cum știm că se formează, este:

$$t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 16t - 6 = 0$$

sau:

$$(4) \qquad 2t^3 - 17t^2 + 32t - 12 = 0$$

Dar primul membru se anulează pentru $t = 2$, deci se divide prin $t - 2$ și ecuația (4) devine:

$$(t - 2)(2t^2 - 13t + 6) = 0,$$

de unde:

$$t_1 = 2,\ t_2 = 6,\ t_3 = \frac{1}{2}$$

Dar aceste rădăcini, sunt într'o ordine oricare, tocmai numerile x, y, z.

Avem deci pentru sistemul dat următoarele șase sisteme de soluții:

x	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	6	6
y	6	$\frac{1}{2}$	2	6	$\frac{1}{2}$	2
z	$\frac{1}{2}$	6	6	2	2	$\frac{1}{2}$

Soluții date de d-nii: *Cuciureanu Ștefan* (lic. Milit., Iași), *Derenbaum M.* (lic. Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit. București), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit. București), *Grecu M. Cristache* (Oltenița), *Grinberg Meer* (lic. Tighina), *Lupescu Gh. C-tin*, *Marșieu Teodor* (Șc, Polit. Timișoara), *Mereuță Emilian* (Șc. Polit. București), *Mihăileanu M.* (lic. Constanța), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, București), *Oelze Emil* (Șc. Polit. Timișoara), *Parepeanu C. Jean* (Constanța), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Purdilă A.* (lic. Brașov), și *Russu D. C-tin* (Constanța).

Au mai trimes soluții d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București), *Curchi Ioan* și *Ionescu P. Haralamb* (Oltenița).

887. *Se cer patratele perfecte de forma a b b c b d, în care c d este un patrat perfect, iar c este suma cifrelor identice.*

LUCIAN I. DAVID

Patratele de forma $c\,d$ sunt:

01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Dintre acestea, cele care îndeplinesc condiţiunea:

$$c = 3\,b,$$

sunt:

36 şi 64.

Atunci avem numerele:

$a\ 11316$, $a\ 22624$

a poate lua valori de la 1 la 3, deci patratele cerute se găsesc printre numerile:

111316, 211316, 311316, 411316, 511316, 611316, 711316, 811316, 911316, 122624, 222624, 322624, 422624, 522624, 622624, 722624, 822624, 922624.

Lăsăm la o parte numerile divizibile cu 3, fără a fi şi cu 9, căci acestea nu pot fi patrate perfecte, iar din cele rămase găsim că numai 322624 este patrat perfect,

$$322624 = 568^2,$$

care ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit. Iaşi) *Băcicov B.* (Tighina), *Bugeanu C.* (lic. Timişoara), *Ciancilian Agop* (Balcic), *Constantinescu P. Mircea* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu St. Hristache* (Şc. Polit. Bucureşti), *Derenbaum M.* (lic. Tighina), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenita), *Grinberg Meer* (lic. Tighina), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Jeba Constantin* (Şc. Polit. Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit. Timişoara), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mihăileanu N. Nicolae* (lic. Constanţa), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit. Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), *Nagler Meyer* (lic, Naţional, Iaşi), *Oelze Emil* (Şc. Polit. Timişoara), *Parepeanu C. Ioan* (lic. Braşov), *Patron Mihail* (lic. Milit. Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Presbitereanu D. Mihail* (bacalaureat), *Russu D. C-tin* (Constanţa), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Smărăndoiu* (lic. R.-Vâlcea), *Ştefănescu-Goangă Aurel* (Cluj), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit. Iaşi), *Velicescu Gh. Titu* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), şi *Weissmann Mauriciu* (lic. Constanţa).

Observare. Soluţia este redactată după acea dată de d-l *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti).

Au mai trimes soluţii d-nii: *Boerescu P. Gheorghe* (lic. Oltenita), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti) şi *Ionescu D. Ion* (Bucureşti).

888. *Să se calculeze suma:*

$$S = 12 + 213 + 3114 + 41115 + \ldots + n\,11\ldots1\,m,$$

unde $m = n + 1$, ultimul număr având cifra 1 de $(n-1)$ ori.

CRISTACHE M. GRECU

Termenii sumei se pot descompune astfel:

$$12 = 2 + 10$$
$$213 = 3 + 10 + 2.10^2$$
$$3114 = 4 + 10 + 10^2 + 3.10^3$$
$$41115 = 5 + 10 + 10^2 + 10^3 + 4.10^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\,11\ldots1\,m = (n+1) + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + \ldots + 10^{n-1} + n\,10^n$$

Adunând pe coloane aceste numere, obţinem:

$$S = \left[2 + 3 + 4 + 5 \ldots + (n+1)\right] + n\,10 + n\,10^2 + n\,10^3 + \ldots + n\,10^n.$$

Ţinând seamă de formula care ne dă suma unei progresii aritmetice şi a uneia geometrice, putem scri încă:

$$S = \frac{n(n+3)}{2} + n\,10.\frac{10^n - 1}{9}$$
$$= \frac{n}{18}\left[9(n+3) + 2.10^{n+1} - 20\right],$$

sau:

$$S = \frac{n}{18}(9n + 2.10^{n+1} + 7)$$

Soluţii date de d-nii: *Băcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab), Bucureşti), *Dăscălescu Hristache* (Şc. Polit. Bucureşti), *Derenbaum M.* (lic. Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Jeba Constantin* (Şc. Polit. Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit. Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita, *Oelze Emil* (Şc. Polit. Timişoara) *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc, Polit. Timişoara), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), şi *Savin C. Petru* (lic. Milit. Iaşi).

Observare. D-l *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), a generalizat chestiunea.

Au mai trimes soluţii d-nii: *Marineanu Traian* (student Bucureşti) şi *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara).

891. *Să se elimineze x, y, z între relaţiile:*

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sqrt[4]{\frac{x+y}{x-y}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\sqrt[4]{\frac{x-y}{x+y}} = 2$$

$$\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y+z}{y-z}}+\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}\cdot\sqrt[4]{\frac{y-z}{y+z}}=2$$

$$\sqrt{\frac{c-a}{c+a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{z+x}{z-x}}+\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\cdot\sqrt[4]{\frac{z-x}{z+x}}=2$$

CEZAR COSNITA

Dacă notăm:

$$(1)\qquad \sqrt[4]{\frac{x+y}{x-y}}=t,\ \sqrt[4]{\frac{y+z}{y-z}}=u,\ \sqrt[4]{\frac{z+x}{z-x}}=v,$$

relaţiile date devin:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\cdot t-2t+\sqrt{\dfrac{a+b}{c-b}}\cdot\dfrac{1}{t}=2\\ \sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}\cdot u-2u+\sqrt{\dfrac{b+c}{a-c}}\cdot\dfrac{1}{u}=2\\ \sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}}\cdot v-2v+\sqrt{\dfrac{c+a}{c-a}}\cdot\dfrac{1}{v}=2\end{cases}$$

sau încă:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a-b}{b+b}}\cdot t^3-2t+\sqrt{\dfrac{a+b}{c-b}}=0\\ \sqrt{\dfrac{b-c}{b+c}}\cdot u^2-2u+\sqrt{\dfrac{b+b}{b-c}}=0\\ \sqrt{\dfrac{c-a}{c+a}}\cdot v^2-2v+\sqrt{\dfrac{c+a}{c-a}}=0\end{cases}$$

Rezolvând aceste ecuaţii, obţinem:

$$t=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}},\ u=\sqrt{\frac{b+c}{b-c}},\ v=\sqrt{\frac{c+a}{c-a}}$$

Ţinând seamă de notaţiile (1) şi ridicând la puterea 4-a, avem:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

$$\frac{y+z}{y-z}=\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}$$

$$\frac{z+x}{z-x}=\frac{(c+a)^2}{(c-a)^2}$$

Aplicând o proprietate a proporţiilor, obţinem:

$$\frac{x}{y}=\frac{a^2+b^2}{2ab},\ \frac{y}{z}=\frac{b^2+c^2}{2bc},\ \frac{z}{c}=\frac{c^2+a^2}{2ac}:$$

Multiplicând aceste relaţii, se elimină x, y, z şi eliminantul este:

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)=8a^2b^2c^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit. Iaşi), *Băcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Dăscălescu St. Hristache* (Şc. Polit. Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit. Bucureşti), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marcu Aurel* (Şc. Polit. Timişoara) *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit. Bucureşti), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Oelze Emil* (Şc. Polit. Timişoara), *Patron Mihail* (lic. Milit. Iaşi), *Puta Traian* (student), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Savin C. Petru* (lic. Milit. Iaşi), *Saur Ioan* (Şc. Polit. Timişoara), şi *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit. Iaşi).

A mai trimes soluţie d-l *Marineanu Traian* (student, Bucureşti).

892. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(a-2x-2\sqrt{x^2-ax-b^2})^n-(a+2bi)^n=0,$$

unde, $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

Ecuaţia dată se poate scri:

$$\frac{a-2x-2\sqrt{x^2-ax-b^2}}{a+2bi}=\sqrt[n]{1}=e^{\frac{2ki\pi}{n}},$$

$$(k=0,1\,2\ldots n)$$

$$-2\sqrt{x^2-ax-b^2}=(a+2bi)e^{\frac{2ki\pi}{n}}-$$
$$-a+2x.$$

Ridicând la patrat şi simplificând, găsim:

$$-4b^2=(a+2bi)^2e^{\frac{4ki\pi}{n}}+a^2+2(2x-a)\times$$
$$(a+2bi)e^{\frac{2ki\pi}{n}}$$

sau:

$$(a+2bi)^2e^{\frac{4ki\pi}{n}}+2(2x-a)(a+2bi)e^{\frac{2ki\pi}{n}}+$$
$$a^2+4b^2=0.$$

Inpărţind prin:

$$(a+2bi)e^{\frac{2ki\pi}{n}},$$

obţinem:

$$(a+2bi)e^{\frac{2ki\pi}{n}}+2(2x-a)+$$
$$(a-2bi)e^{-\frac{2ki\pi}{n}}=0,$$

care se mai poate scri:

$$(1)\quad a\left(e^{\frac{2ki\pi}{n}}+e^{-\frac{2ki\pi}{n}}\right)+2bi\times$$
$$\left(e^{\frac{2ki\pi}{n}}-e^{-\frac{2ki\pi}{n}}\right)+4x-2a=0.$$

Ţinând seamă de formulele lui *Euler*:

$$\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=\cos\alpha,\ \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=\sin\alpha,$$

ecuaţia (1) se poate scri simplificând cu 2:

$$a\cos\frac{2k\pi}{n}-2b\sin\frac{2k\pi}{n}+2x-a=0.$$

De aci deducem:

$$2x=a\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)+2b\sin\frac{2k\pi}{n},$$

sau:

$$x=a\sin^2\frac{k\pi}{n}+b\sin\frac{2k\pi}{n},$$

$$(k=0,1,2\ldots n)$$

Soluţii foarte bune date de d-nii: *Băcicov P. Boris* (student), *Dăscălescu St. Hristache* (Şc. Polit. Timişoara), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Mihăileanu N. Nicolae* (lic. Constanţa), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit, Timişoara), şi *Negreu A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti).

Au mai trimes soluţii d-nii: *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita) şi *Marineanu Traian* (student, Bucureşti).

894. *Să se resolve ecuaţia:*

$$\frac{\sin x+\operatorname{cosec} x}{\sin^3 x+\operatorname{cosec}^3 x}+\frac{\cos x+\sec x}{\cos^3 x+\sec^3 x}-\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{cotg}^3 x}=1.$$

NICOLAE PAVEL

In virtutea identităţii:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

ecuaţia dată se poate simplifica şi devine:

$$\frac{1}{\sin^2 x-1+\operatorname{cosec}^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x-1+\sec^2 x}=1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x-1+\operatorname{cotg}^2 x}$$

Inlocuind în funcţie de sinus, toate celelalte funcţiuni trigonometrice, obţinem:

$$\frac{\sin^2 x}{\sin^4 x-\sin^2 x+1}+\frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x-\sin^2 x+1}=1+\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{3\sin^4 x-3\sin^2 x+1}$$

$$\frac{1}{\sin^4 x-\sin^2 x+1}=\frac{2\sin^4 x-2\sin^2 x+1}{3\sin^4 x-3\sin^3 x+1}$$

Notând:

$$\sin^4 x-\sin^2 x+1=y,$$

putem scri încă:

$$\frac{1}{y}=\frac{2y-1}{3y-2},$$

sau:

$$y^2-2y+1=0,$$

De aci deducem:

$$y=1.$$

Atunci resultă:

$$\sin^4 x-\sin^2 x+1=1$$

$$\sin^2 x\cos^2 x=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=k\pi \text{ şi } x=(2k\pm 1)\frac{\pi}{2}$$

$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

Soluţii date de d-nii: *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Cuciureanu St.* (lic. Mitit. Iaşi), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit. Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit. Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenita), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Jeba Constantin* (Şc. Polit. Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit. Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit. Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (lic. Constanţa), *Oelze Emil* (Şc. Polit. Timişoara), *Parepeanu C. Ioan* (lic. Braşov), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Purdilă A.* (lic. Braşov), şi *Puta Traian* (student).

A mai trimes soluţie d-i *Marineanu Traian* (student, Bucureşti).

895. *Se cer numerile de forma a b c d, ştiind că suma cifrelor este un număr prim, iar patratul numărului c a este egal cu numărul format scriind consecutiv cifrele b, b — c, a.*

HARALAMB P. IONESCU

Conform enunţului avem:

1) $$(ca)^2=100b+10(b-c)+a, \qquad a\neq 0.$$

Membrul al 2-lea fiind de trei cifre, rezultă:

$$ca\leq 31.$$

Din egalitatea (1) observăm încă că patratul lui ca trebuie să se termine cu a, deci ca nu poate fi de cât:

1, 5, 6, 11, 15, 16, 21, 25, 26, 31.

Inlocuind aceste numere în locul lui ca, egalitatea (1) ne dă:

$$1 = 100b + 10\ b + 1$$
$$25 = 100b + 10\ b + 5$$
$$36 = 100b + 10\ b + 6$$
$$121 = 100b + 10(b-1) + 1$$
$$225 = 100b + 10(b-1) + 5$$
$$256 = 100b + 10(b-1) + 6$$
$$441 = 100b + 10(b-2) + 1$$
$$625 = 100b + 10(b-2) + 5$$
$$676 = 100b + 10(b-2) + 6$$
$$961 = 100b + 10(b-3) + 1$$

Ţinând seamă că b este de o cifră, uşor putem observa că din aceste zece egalităţi, numai prima şi ultima pot fi satisfăcute, prima pentru $b = 0$ şi ultima pentru $b = 9$.

Rezultă că numărul $abcd$ n'ar putea fi de cât de forma:

$$100d \text{ sau } 193d.$$

Să căutăm a satisface şi condiţia, ca suma cifrelor să fie un număr prim.

1°. Printre numerile de forma $100d$, numai numerile: 1000, 1001, 1002, 1004, 1006, satisfac această condiţie.

2°. Printre numerile $193d$ numerile: 1930, 1934, 1936, au suma cifrelor un număr prim.

Problema admite în total următoarele opt soluţiuni:

1000, 1001, 1002, 1004, 1006, 1930, 1934, 1936.

A găsit toate cele opt soluţii numai d-l: *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita).

Au găsit numai ultimile trei soluţii d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit. Iaşi), *Antonescu C. Aurel* (Şc. Polit. Bucureşti), *Băcicov B.* (Tighina), *Constantinescu P. Mircea* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit. Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (lic. Naţional, Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Grinberg Meer* (lic. Tighina), *Grossu I. Aurel* (lic. Carol, Craiova) *Ieba Constantin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marcu Aureliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea* (lic. Oltenita), *Oelze Emil* (Şc. Polit., Timişoara), *Parepeanu Ioan* (lic. Braşov), *Patron Mihai* (lic. Milit. Iaşi), *Purdilă Anton* (lic. Braşov), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Smărăndoiu* (lic. R.-Vâlcea), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iaşi), *Velicescu Titu* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), şi *Weismann Mauriciu* (lic. Constanţa).

A găsit numai soluţia 1936, d-l *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), căci d-sa a impus condiţia în plus, ca numărul căutat abc să fie şi patrat perfect,

$$1936 = 44^2,$$

ceeace nu cerea problema.

Au mai trimes soluţii d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenita) şi *Ionescu D. Ion* (Şc. Normală, Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

927. Să se găsească patratele perfecte de forma $abcdea$ în care ea este cub perfect, ad patrat perfect şi be tot patrat perfect.

M. PATRON

928. Se cer patratele perfecte:

$$abcdde = N^2 \text{ şi } abfddg = (N+1)^2,$$

în care e, f, g sunt patrate perfecte, iar c e cub perfect.

VLADIMIR I. CRIVAT

929. Fie un trapez ABCD, E intersecţia diagonalelor AC şi BA. Prelungim pe AB cu distanţa BF egală cu CD, iar pe CD cu distanţa DG egală cu AB.

Dreapta GF intersectează pe BA în H. In ce caz segmentele DH, HE, EB sunt egale?

NICOLAE MIHAILEANU

930. Fie $\overline{A_1B_1}$ şi $\overline{A_2B_2}$ doi vectori paraleli, iar $\overline{CD}$ vectorul lor rezultant. Considerând intersecţiile $E_1\ (\overline{A_1A_2}, \overline{DB_1})$ şi $E_2\ (\overline{A_1A_2}, \overline{DB_2})$, să se arate că $\overline{E_1C} = \overline{CE_2}$.

JUSTIN N. VALCEANU

931. Dacă a şi b sunt două numere reale, $a < b$, să se demonstreze că avem:

$$\sqrt[8]{a^3} < \frac{5}{8} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[8]{b^5} - \sqrt[8]{a^5}} < \sqrt[8]{b^3}$$

Să se verifice în cazul particular $a = 1$, $b = 2$.

V. ALACI

932. Să se resolve ecuaţia:

$$\sqrt[3]{536 + x} + \sqrt[3]{536 - x} = 16$$

IOAN CURCHI

933. Se notează s, s_1 şi r, r_1 ariile şi razele cercurilor înscrise unghiului ABC şi triunghiului său oritic $A_1B_1C_1$. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{s_1 r^2}{s r_1^2} = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} B \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} C \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

934. Să se resolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} 4x - 3 \operatorname{tg} 2x = 0.$$

NECULAI TH. DONCIU

INFORMAȚIUNI

Suntem dureros impresionați de moartea prea timpurie a distinsului profesor de matematică din București, *Ioan Crăciunescu*, membru în Comitetul Revistei noastre. Ca student la Universitatea din București, tânărul *Crăciunescu* se distingea prin'un fin spirit matematic, fiind un abil cercetător de lucrări originale, luând chiar premiul Hillel de la Universitate pentru una din lucrările sale.

Exprimăm pe această cale profundul nostru regret și adânca noastră durere, prea întristatei sale familii.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu*.

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș-

---

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problema separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

REVISTA MATEMATICĂ
din
TIMIȘOARA

ANUL X. 15 SEPTEMVRIE 1930 NO. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. I. MURAROIU CONTRIBUTII LA STUDIUL ECUATIEI DE GR. AL 2 LEA
2. NOTE MATEMATICE: 16, 17
3. PROBLEME REZOLVATE: 173, 198, 207, 208, 212, 213, 214.
4. PROBLEME PROPUSE
5. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMVRIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL ECUAȚIEI DE GR. AL 2-LEA

de I. MURAROIU

Voiu studia în cele ce urmează *problema determinării coeficienților ecuației de gr. al 2-lea:*

$$(1) \qquad f(x) = a x^2 + b x + c = 0,$$

astfel ca rădăcinile ei să fie respectiv cuprinse între (l_1, l_2) *și* (l_3, l_4).

Apoi cazul particular, în deosebi interesant, al determinării acelorași coeficienți, pentru ca o rădăcină să fie cuprinsă între (l_1, l_2), cealaltă fiind oricum (deci cazul $l_3 = -\infty, l_4 = +\infty$).

Fie x_1 și x_2 cele două rădăcini. Prin faptul precizării lui x_1, ca variind între două numere reale, am pus condiția ca el să fie real. Implicit, x_2 este real.

In ecuația (1) facem substituția:

$$(2) \qquad y = \frac{m-x}{x-n}, \qquad (m > n),$$

care dă:

$$x = \frac{m + n y}{1 + y}.$$

Observăm că dacă x este cuprins între m și n, y este pozitiv; când x e în afara acestor numere, y este negativ; și reciproc. Deci putem reduce condițiile de mărime la condiții de semn. Rezultatul substituției amintite este:

$$(3) \qquad f(y) = (a n^2 + b n + c) y^2 + [2 a m n + b(m+n) + 2c] y + (a m^2 + b m + c) = 0.$$

Condiția de realitate a rădăcinilor acestei ecuații se reduce la aceea a ecuației (1), căci avem:

$$R_2 = [2 a m n + b(m+n) + 2c]^2 - 4(a m^2 + b m + c)(a n^2 + b n + c) = (b^2 - 4ac)(m-n)^2 = R_1 (m-n)^2,$$

iar m și n sunt reali.

Distingem trei cazuri, reprezentate prin inegalitățile:

$$l_1 < l_2 < l_3 < l_4 \quad ; \quad l_1 < l_3 < l_2 < l_4 \quad ; \quad l_1 < l_3 < l_4 < l_2.$$

1°. $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$. Să remarcăm de-acum cazul particular interesant $l_2 = l_3$, de oarece nu vom insista mai mult asupra lui.

Luăm $m = l_2$, $n = l_1$ și ecuația (3) devine:

$$f(y) = (a l_1^2 + b l_1 + c) y^2 + [2 a l_1 l_2 + b(l_1 + l_2) + 2c] y + (a l_2^2 + b l_2 + c) = 0.$$

Dacă:

$$\frac{a l_2^2 + b l_2 + c}{a l_1^2 + b l_2 + c} < 0,$$

o rădăcină a ecuației propuse (1) e în intervalul (l_1, l_2), alta în afară.

Punând în (2):

$$m = l_4 \quad n = l_3,$$

ecuația (3) devine:

$$f(y) = (a l_3^2 + b l_3 + c) y^2 + [2 a l_3 l_4 + b(l_3 + l_4) + 2c] y + (a l_4^2 + b l_4 + c) = 0.$$

Condiția:

$$\frac{a l_4^2 + b l_4 + c}{a l_3^2 + b l_3 + c} < 0,$$

exprimă că o rădăcină a ecuației (1) este în intervalul (l_3, l_4), alta în afară.

In rezumat, condițiile necesare și suficiente în acest caz sunt:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad \frac{a l_2^2 + b l_2 + c}{a l_1^2 + b l_1 + c} < 0,$$

$$\frac{a l_4^2 + b l_4 + c}{a l_3^2 + b l_3 + c} < 0.$$

2°. $l_1 < l_3 < l_2 < l_4$. Să punem:

$$z_1 = x_1 - \frac{l_2 - l_3}{2} \quad , \quad z_2 = x_2 + \frac{l_2 - l_3}{2}.$$

și să însemnăm, pentru prescurtare:

$$\frac{l_2 - l_3}{2} = r, \quad \frac{l_2 + l_3}{2} = s.$$

Avem:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + r(x_1 - x_2) - \frac{r^2}{4} =$$

$$\frac{1}{a}\left(c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2\right)$$

Deci:

(4) $f(z) = az^2 + bz + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2) = 0.$

Să punem în (2):

$$z = \frac{s - y}{y - l_1}.$$

Ecuația (4) devine:

$$f(y) = [a l_1^2 + b l_1 + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)] y^2 +$$

$$[2a l_1 s + b(l_1 + s) + 2(c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)]$$

$$y + [as^2 + bs + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)] = 0.$$

Dacă:

$$\frac{as^2 + bs + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)}{a l_1^2 + b l_1 + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)} < 0,$$

o rădăcină a ecuației (4) este cuprinsă între l_1 și s.

Să facem acum în ecuația (4) substituția:

$$z = \frac{l_4 - y}{y - s}.$$

Găsim ecuația:

$$f(y) = [as^2 + bs + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)] y^2 +$$

$$[2a s l_4 + l(s + l_4) + 2(c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)] y$$

$$+ [a l_4^2 + b l_4 + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)] = 0.$$

Dacă:

$$\frac{a l_4^2 + b l_4 + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)}{as^2 + bs + (c \pm r\sqrt{b^2 - 4ac} - ar^2)} < 0,$$

rădăcina z_2 este cuprinsă între s_1 și l_4.

In rezumat, condițiile necesare și suficiente pentru acest caz sunt:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad \frac{2a l_2 l_3 + b(l_2 + l_3) + 2c \pm (l_2 - l_3)\sqrt{b^2 - 4ac}}{4(a l_1^2 + b l_1 + c) + (l_2 - l_3)[\pm 2\sqrt{b^2 - 4ac} - a(l_2 - l_3)]} < 0,$$

$$\frac{4(a l_4^2 + b l_4 + c) + (l_2 - l_3)[\pm 2\sqrt{b^2 - 4ac} - a(l_2 - l_3)]}{2a l_2 l_3 + b(l_2 + l_3) + 2c \pm (l_2 - l_3)\sqrt{b^2 - 4ac}} < 0.$$

3°. $l_1 < l_3 < l_4 < l_2$. Făcând în ecuația (1) substituția:

$$y = \frac{l_2 - x}{x - l_1},$$

găsim:

$$f(y) = (a l_1^2 + b l_1 + c) y^2 + [2a l_1 l_2 + b(l_1 + l_2) +$$

$$2c] y + (a l_2^2 + b l_2 + c) = 0.$$

Trebuie să avem inegalitatea:

$$\frac{a l_2^2 + b l_2 + c}{a l_1^2 + b l_1 + c} > 0.$$

In aceeași ecuație să mai facem substituția:

$$y = \frac{l_4 - x}{x - l_3}.$$

Găsim:

$$f(y) = (a l_3^2 + b l_3 + c) y^2 + [2a l_3 l_4 + b(l_3 + l_4) +$$

$$2c] y + (a l_4^2 + b l_4 + c) = 0,$$

ecuație care ne dă condiția:

$$\frac{a l_4^2 + b l_4 + c}{a l_3^2 + b l_3 + c} < 0.$$

Prin urmare, în acest caz, inegalitățile de condiție între coeficienții ecuației (1) sunt:

$$b^2 - 4ac > 0, \quad \frac{a l_2^2 + b l_2 + c}{a l_1^2 + b l_1 + c} > 0,$$

$$\frac{a l_4^2 + b l_4 + c}{a l_3^2 + b l_3 + c} < 0.$$

4°. $l_1 < x_1 < l_2$. Să luăm în (2):

$$m = l_2, \quad n = l_2.$$

Ecuația (3) devine:

$$f(y) = (a l_1^2 + b l_1 + c) y^2 + [2 a l_1 l_2 + b (l_1 + l_2) + 2 c] y + (a l_2^2 + b l_1 + c) = 0.$$

Când ambele rădăcini x găsesc între (l_1, l_2), avem:

$$b^2 - 4 a c > 0, \frac{a l_2^2 + b l^2 + c}{a l_1^2 + b l_1 + c} > 0,$$

$$\frac{2 a l_1 l_2 + b (l_1 + l_2) + 2 c}{a l_1^2 + b l_1 + c} < 0.$$

Când una se găsește în intervalul (l_1, l_2), iar cealaltă în afară, avem:

$$b^2 - 4 a c > 0 \ , \ \frac{a l_2^2 + b l_2 + c}{a l_1^2 + b l_1 + c} < 0.$$

Să se observe că ansamblul celor două cazuri formează soluția integrală a problemei.

Pentru fixarea ideilor, să considerăm o problemă mai concretă, din care să se vadă modul de interpretare al inegalităților găsite ca rezultate:

Să se determine coeficienții ecuației de gr. al 2-lea:

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

astfel ca rădăcinile ei să fie:

1°. *Mai mari decât* $+1$;

2°. *Mai mici decât* -1;

3°. *Cuprinse în intervalul* $(-1, +1)$;

4°. *Cuprinse respectiv în intervalele* $(-1, 0)$ *și* $(0, +1)$.

(Aceste chestiuni au fost propuse în *Gazeta Matematică* de către *d-l Căpitan I. Linteș*, sub problemele 3858 și 3877).

Să punem:

$$\frac{b}{a} = p, \quad \frac{c}{a} = q.$$

Luând în (2):

$$m = 1 \quad , \quad n = -1,$$

ecuația (3) devine:

$$f(y) = (a - b + c) y^2 - 2 (a - c) y + (a + b + c) = 0.$$

Va trebui să avem:

1°. $p^2 - 4 q > 0$, $\frac{1 + p + q}{1 - p + q} > 0$,

$$\frac{1 - q}{1 - p + q} < 0 \ , \ p < 0.$$

2°. Aceleași condiții, afară de ultima, care este înlocuită prin $p > 0$.

3°. $p^2 - 4 q > 0$, $\frac{1 + p + q}{1 - p + q} > 0$,

$$\frac{1 - q}{1 - p + q} > 0.$$

4°. Ne găsim în cazul I, unde luăm:

$$l_1 = -1 \ , \ l_2, = l_3, = 0 \ , \ l_4 = 1.$$

Avem:

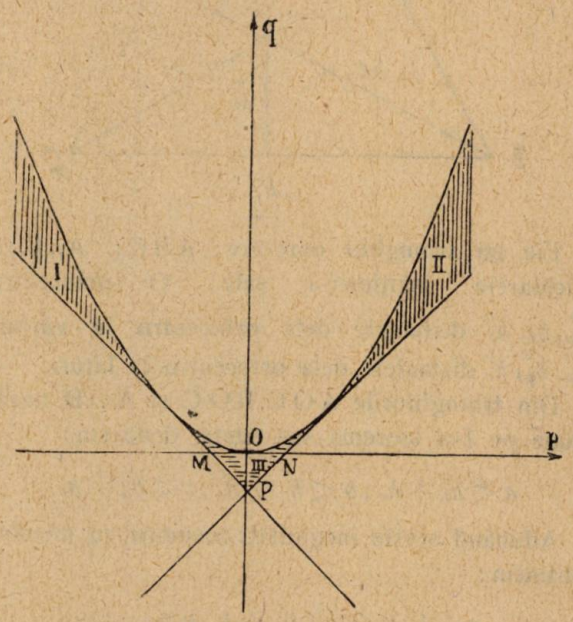
$$p^2 - 4 p > 0 \ , \ \frac{q}{1 - p + q} < 0, \frac{1 + p + q}{q} < 0.$$

Ne vom baza pe proprietatea liniilor de a separa planul în regiuni. Ecuația:

$$p^2 - 4 q = 0,$$

reprezintă o parabolă ce trece prin origină.

Se verifică ușor că dreptele $1 - p + q = 0$ și $1 + p + q = 0$ sunt tangente la această conică în punctele $(2, 1)$ și $(-2, 1)$.



Regiunea I corespunde cazului 1°.

„ II „ „ 2°.

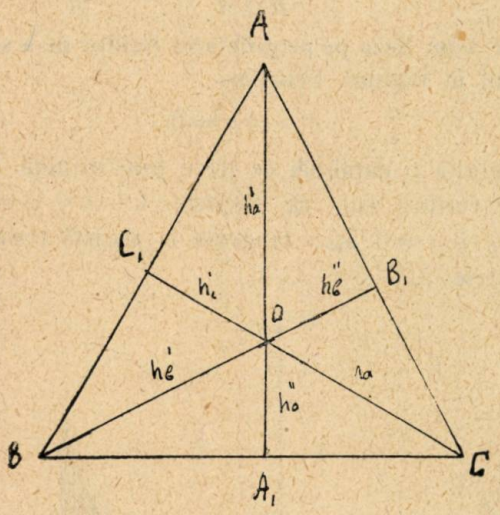
„ III „ „ 3°.

Pentru cazul 4° avem regiunea din plan cuprinsă între laturile triunghiului M N P.

NOTE MATEMATICE

16. *Asupra inegalităţilor între elementele unui triunghiu.*

In cele ce urmează voi căuta să stabilesc câteva inegalităţi între elementele unui triunghiu bazându-mă pe teoreme elementare din geometria plană; anume: 1°. Intr'un triunghiu orice latură e mai mică decât suma celorlalte două şi mai mare ca diferenţa lor; 2°. Orice linie frântă înconjurată e mai mică decât altă linie frântă, cu aceleaşi extremităţi; făcând pe urmă diferite transformări posibile în inegalităţi astfel stabilite, precum şi comparându-le între ele.



Fie un triunghiu oarecare A B C; A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimelor sale; O ortocentru; h'_a, h'_b, h'_c distanţele dela ortocentru la vârfuri; h''_a, h''_b, h''_c distanţele dela ortocentru la laturi.

Din triunghiurile A O C, B O C şi A O B, bazându-dune pe 1-a teoremă sus citată, deducem:

$$a < h'_b + h'_c\,;\; b < h'_a + h'_c\,;\; c < h'_a + h'_b.$$

Adunând aceste inegalităţi membru cu membru, obţinem:

$$a + b + c < 2\,(h'_a + h'_b + h'_c),\text{ sau}$$

$$(1)\qquad p < h'_a + h'_b + h'_c, \left(\text{unde } p = \frac{a+b+c}{2}\right).$$

Ţinând seamă de formulele: $h'_a = 2\,R\cos A$ etc., relaţia (1) devine:

$$(2)\qquad 2\,R\,(\cos A + \cos B + \cos C) > p$$

In virtutea relaţiilor cunoscute:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

şi

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_a - r}{4\,R}},\text{ etc},$$

inegalitatea (2) devine:

$$2\,R - \sqrt{\frac{(r_a - r)(r_b - r)(r_c - r)}{R}} > p\,;$$

unde făcând:

$$R = \frac{a\,b\,c}{4\,s},$$

obţinem:

$$(3)\qquad 2\sqrt{s\,\Pi\,\frac{r_a - r}{a}} > 2\,R - p.$$

Se ştie:

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R + r}{R}.$$

(F. G. M. pag. 215), deci inegalitatea (2) devine:

$$(4)\qquad 2\,(R + r) > p.$$

Din acesta din urmă, ştiind

$$R = \frac{\Pi\,(r_a + r_b)}{4\,\Sigma\,r_a\,r_b}\text{ şi } r = \frac{r_a\,r_b\,r_c}{\Sigma\,r_a\,r_b},$$

deducem:

$$(5)\qquad \frac{(r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_b + r_c) + 4\,r_a\,r_b\,r_c}{2\,(r_a\,r_b + r_a\,r_c + r_b\,r_c)} > p.$$

In problema 825 pag. 107. R. M. T. V. IX se stabileşte:

$$\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \cos A + \cos B + \cos C,$$

pe care înlocuind'o în inegalitatea (2) obţinem:

$$(6)\qquad 2\,R\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} > p.$$

Relaţia (4), ţinând seamă de

$$R = \frac{2\,h_a^3\,h_b^3\,h_c^3}{\Sigma\,h_a\,h_b\,\Pi\,(h_a\,h_b + h_b\,h_c - h_a\,h_c)}$$

$$\text{și,}\quad r=\frac{h_a h_b h_c}{\sum h_a h_b};$$

devine:

$$(7)\qquad \frac{2r[2h_a^2h_b^2h_c^2+II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)]}{II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)}>p.$$

Tot aceiași inegalitate în virtutea relațiilor:

$$R=\frac{2r_a r_b r_c}{\sum h_a h_b}$$

și a valoarei lui r de mai sus, se transformă în:

$$(8)\qquad \frac{2(2r_a r_b r_c+h_a h_b h_c)}{\sum h_a h_b}>p.$$

Considerând triunghiurile:

A_1OC; A_1OB; C_1OB; C_1OA; B_1OA și B_1OC,

în virtutea teoremei 1°, citată la început, putem scri:

$A_1C<h_a''+h_c'$; $A_1B<h_a''+h_b'$; $C_1B<h_c''+h_b'$;

$C_1A<h_c''+h_a'$; $B_1A<h_b''+h_a'$; $B_1C<h_b''+h_c'$;

Adunând membru cu membru aceste inegalități obținem:

$$(9)\qquad p<(h_a'+h_b'+h_c'+h_a''+h_b''+h_c'')\text{ sau}$$

$$h_a+h_b+h_c>p.$$

Ținând seamă de $h_a=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}$ și altele, avem:

$$(10)\qquad \frac{a\sin^2B\sin^2C+b\sin^2A\sin^2C+c\sin^2A\sin^2B}{\sin A\sin B\sin C}>p.$$

In cea din urmă făcând, $\sin A=\frac{a}{2R}$ etc,

obținem:

$$\frac{abc(ab+bc+ac)}{16R^2}>p\sin A\sin B\sin C.$$

Dar se știe:

$$ab+bc+ac=r(r_a+r_b+r_c)+\sum r_a r_c \text{ și}$$

$$abc=4sR,$$

deci:

$$(11)\qquad \frac{s[r(r_a+r_b+r_c)+r_a r_b+r_b r_c+r_a r_c]}{4R}>$$

$$p\sin A\sin B\sin C$$

In virtutea teoremei 2° citată la început, putem scri:

$$h_a'+h_b'<a+b;\ h_a'+h_c'<a+c;\ h_b'+h_c'<b+c.$$

Adunând membru cu membru avem:

$$(12)\qquad p>\frac{h_a'+h_b'+h_c'}{2}$$

Ținând seamă de relațiile citate până acum, inegalitatea (12) devine succesiv:

$$(13)\qquad p>R+r$$

$$(14)\qquad p>\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)+4r_a r_b r_c}{4\sum r_a r_b}$$

$$(15)\qquad p>R\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2}$$

$$(16)\qquad p>\frac{r[2h_a^2h_b^2h_c^2+II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)]}{II(h_a h_b+h_b h_c+h_a h_c)}$$

$$(17)\qquad p>\frac{(2r_a r_b r_c+h_a h_b h_c)}{(h_a h_b+h_b h_c+h_a h_c)}$$

Acuma comparând inegalitățile sus-stabilite cu cele stabilite mai înainte putem deduce o serie de inegalități interesante.

Astfel comparând inegalitatea (6) cu inegalitățile (14) și (16), deducem:

$$(18)\qquad 2R\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2}>$$

$$\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)+4r_a r_b r_c}{4(r_a r_b+r_b r_c+r_a r_c)}$$

$$(19)\qquad 2R\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2}>$$

$$\frac{r[2h_a^2h_b^2h_c^2+II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)]}{II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)}$$

Inegalitatea (7) comparată cu (14) și (17) ne dă:

$$(20)\qquad \frac{2r[2h_a^2h_b^2h_c^2+II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)]}{4(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)}>$$

$$\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)+4r_a r_b r_c}{4(r_a r_b+r_a r_c+r_b r_c)}$$

$$(21)\qquad \frac{2r[2h_a^2h_b^2h_c^2+II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)]}{II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)}>$$

$$\frac{2r_a r_b r_c+h_a h_b h_c}{h_a h_b+h_b h_c+h_a h_b}$$

Comparând inegalitatea (5) cu inegalitatea (17), avem:

(22) $$\frac{(r_a+r_b)(r_a+r_c)(r_b+r_c)+4\,r_a r_b r_c}{2(r_a r_b+r_b r_c+r_a r_c)} > \frac{2\,r_a r_b r_c+h_a h_b h_c}{h_a h_b+h_b h_c+h_a h_c}$$

Din inegalitatea (8) comparată cu (13) şi (15), se deduc:

(23) $$\frac{2(2\,r_a r_b r_c+h_a h_b h_c)}{h_a h_b+h_b h_c+h_a h_c} > R+r$$

(24) $$\frac{2(2\,r_a r_b r_c+h_a h_b h_c)}{h_a h_b+h_b h_c+h_a h_c} > R\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2}\,.$$

In sfârşit comparând inegalitatea (10) cu inegalităţile (14), (15) şi (16) se deduc inegalităţile următoare:

(25) $$\frac{a\sin^2 B\sin^2 C+b\sin^2 A\sin^2 C+c\sin^2 A\sin^2 B}{\sin A\sin B\sin C} > \frac{II(r_a+r_b)+4\,r_a r_b r_c}{4\sum r_a r_b}$$

(26) $$\frac{a\sin^2 B\sin^2 C+b\sin^2 A\sin^2 C+c\sin^2 A\sin^2 B}{\sin A\sin B\sin C} > R\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2}$$

(27) $$\frac{\sum a\sin^2 B\sin^2 C}{\sin A\sin B\sin C} > \frac{r[2h_a^2h_b^2h_c^2+II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)]}{II(h_a h_b+h_b h_c-h_a h_c)}$$

La fel se pot stabili şi alte foarte multe inegalităţi între elementele unui triunghiu.

BORIS BACICOV

17. *Asupra problema* 829.

Imi propun să demonstrez inegalitatea mai generală:

(a) $$\frac{x_1^{n-1}-x_1^{n-2}x_2+x_1^{n-3}x_2^2-\ldots\ldots+x_2^{n-1}}{(x_2+x_3)(x_3+x_4,\ldots\ldots(x_n+x_1)}+$$

$$\frac{x_2^{n-1}-x_2^{n-2}x_3+x_2^{n-3}x_3^2\ldots+x_3^{n-1}}{(x_1+x_2)(x_3+x_4)\ldots(x_n+x_1)}$$

$$+\ldots+\frac{x_n^{n-1}-x_n^{n-2}x_1+x_n^{n-3}x_1^2-\ldots+x_n^{n-1}}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots\ldots(x_{n-1}+x_n)} \geqq \frac{n}{n+1}$$

Câtimile $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ fiind reale şi pozitive.

Observaţie.

Adunând ecuaţiile din membrul întâiu, identitase mai poate pune şi sub forma:

$$(a_1)\quad \frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^n}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots\ldots(x_n+x_1)} \geqq \frac{n}{n+1}$$

unde câtimile $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ sunt reale şi pozitive.

Soluţia.

In „R. M. T." An 8 No. 4 pag. 53, în articolul D-lui *N. O. Zaharia,* este menţinută următoarea identitate:

$$2(x^3+y^3+z^3) \geqq xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

făcând aici

$$x=x_1\ ;\ y=x_2 \text{ şi } z=x_3$$

devine:

$$2(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \geqq x_1x_2(x_1+x_2)+x_2x_3(x_2+x_3)+ +x_3x_1(x_3+x_1)$$

care se poate pune sub forma generală:

(1) $$(n-1)(x_1^n+x_2^n+x_3^n+\ldots\ldots +x_n^n) \geqq x_1x_2(x_1+x_2)+\ldots\ldots+x_nx_1(x_n+x_1)$$

Inmulţind ambii membri cu n, inegalitatea (1) nu se schimbă:

(2) $$n(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^n \geqq n[x_1x_2(x_1+x_2)+\ldots\ldots \ldots+x_nx_1(x_n+x_1)]$$

Ştim că: „Media Aritmetică" a n câtimi variabile reale şi pozitive este mai mare sau cel puţin egală cu media lor geometrică:

Scriind aceasta pentru câtimile: $x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots, x_n^n$ avem:

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n+\ldots+x_n^n \geqq n\sqrt[n]{x_1^n, x_2^n, \ldots x_n^n}$$

care se mai poate scri:

$$\sum_{i=n}^{n}x_i^n \geqq n\,.\,x_1\,.\,x_2\ldots x_n$$

Înmulţind ambii membri cu $(n-1)$, inegalitatea nu se schimbă:

(3) $$(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^n \geqq n(n-1)\,x_1\,.\,x_2\ldots x_n$$

Adunând inegalităţile (2) cu (3), membru cu membru avem:

$$(n+1)(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n \geqq n(x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_n+x_1)$$

care se mai poate scri:

$$\frac{(n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^n}{(x_2+x_2)(x_2+x_3)\ldots\ldots(x_n+x_1)} \geqq \frac{n}{n+1}$$

care este tocmai identitatea (a_1), şi cari se poate foarte uşor să se transforme în (a).

Aci făcând:

$$n = 3$$

şi $x_1 = x\,;\ x_2 = y\,;\ x_3 = z$

obţinem problema No. 829.

Deci identitatea generală este astfel stabilita.

DIMITRIU AT. IOAN

PROBLEME REZOLVATE

173. — *Să se arate că în orice triunghiu, între raza* R *a cercului circumscris şi raza* r *a cercului înscris există relaţia:*

$$R > 2r$$

GRIGORE ZAPAN

Insemnând cu d distanţa între centrele celor două cercuri înscris şi circumscris, conform teoremei lui *Euler,* (Exercices de Géometrie, par F. G. M. pag. 173), avem:

$$d^2 = R(R-2r)$$

De aci rezultă imediat:

$$R > 2r,$$

tocmai ce trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Adam M.* (Constanţa), *Aldea N.* (Lic. M-rea Dealu), *Amărescu Gavril* (Caracal), *Angelescu N. Traian* (Lic. Giurgiu), *Antoniu G. Ion* (Lic. M-rea Dealu), *Arcadian P. Nicu* (Lic. Caracal), *Arsene Alexandru* (Lic. Milit, Iaşi), *Atanasiu I. D-tru* (Lil. M-rea Dealu), *Beldie N. D-tru* (Lic. R.-Sărat), *Bercovici A. Emil*, *Berdan C.* (Bârlad), *Beschea G. Nicolae* (Lic. Braşov) *Blumenfeld M. David* (Lic. Botoşani), *Bobărnac C. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Bonea Ioan* (Lic. M-rea Dealu), *Botea Nicolae* (Lic. Cantemir), *Brădeţeanu C. Cornel* (Lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Brăileanu Alexandru* (Lic. Constanţa), *Buşilă A. Adrian* (Lic. Miai-Viteazul, Bucureşti), *Cozacincu A. V.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Cioclov Gh.* (Lic. T.-Severin), *Ciolacu St. Miron* (Caracal), *Ciorănescu I. C.* (Lic. M-rea Dealu), *Cosereanu Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Dobrescu Babici*, *Dragomirescu Eduard* (Şc. Milit. de Artilerie), *Focşeneanu I. M.* (Lic. M-rea Dealu), *Florea C. Alexandru* (Lic. Internat, Iaşi), *Florea Negruţi* (Piteşti), *Gabrielescu C. Vasile* (Lic. Brăila), *Garoafă Pleniţa* (Lic. Carol, Craiova), *Gataianţu V. Barbu* (Lic. Caracal), *Gavril Ciută* (Timişoara), *Georgescu P. C.* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Georgescu E. Florian* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Georgescu I. N. Valeriu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Lic. Galaţi), *Ghiţescu Virgiliu* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Giotta Vicentiu* (Bârlad), *Grofşorean I. Gh.* (Lic. Arad), *Ghişoiu I. Petre* (Lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Iliescu Emilian* (Lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Brezuica* (Lic. Caracal), *Ionescu B. Ioan* (Lic. Piteşti), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Ionescu I. Longin* (Caracal), *Ionescu I. Paul* (Lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lepădatu I. Miclea* (Lic. Cahul), *Lepădatu Victor* (Lic. Internat, Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Miclescu A.* (Şc. Milit. de Artilerie), *Moisil C. Ion* (Lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Morţun Emil* (Lic. Lazăr, Bucureşti), *Niculescu Isaia* (Mizil), *Patroianu Mihail* (Lic. M-rea Dealu), *Părăianu Nicu* (Şc. Navală), *Petrulian St. N.* (Lic. Ploeşti), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Popescu P. Eugen* (T.-Severin), *Popescu Ştefan* (Piteşti), *Popovici C. C-tin* (Lic. Internat, Iaşi), *Popovici C. Ioan* (Lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Popovici P. Dan* (Chişinău), *Popovici Tiberiu* (Lic. Arad), *Râmniceanu I. Cristian* (Lic. Milit., Iaşi), *Rigani Cr.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Savin C. Ioan* (Lic. Milit., Iaşi), *Schileru C. Dili* (Şc. Polit., Timişoara), *Scoruşianu Eugen* (Bucureşti), *Scripcă Laur* (Lic. Naţional, Iaşi), *Silion Gh. Ion* (Lic. Câmpina), *Solocolu Ştefan*, *Stamatiu Mihail* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stănescu A. Nicolae* (Lic. Carol, Craiova), *Stefănescu Emil* (Lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Stoenescu I. Alexandru*, *Stoenescu Ioan* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Tărăbuţă C. Paul* (Lic Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tanovici V. C.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Udrisky Traian* (Lic. Arad), *Vasiliu C. Ion* (Lic. M-rea Dealu), *Weiss Leon* (Lic. Galaţi), *Weiss Solomon* (Lic. Galaţi) şi *Zaharia O. Nicolae* (Lic. Constanţa).

Observare. Această problemă fiind propusă acum 8 ani (an. II), mulţi din rezolvitorii de mai sus şi-au terminat studiile, fiind unii licenţiaţi sau doctori în matematici, alţii ingineri sau ofiţeri.

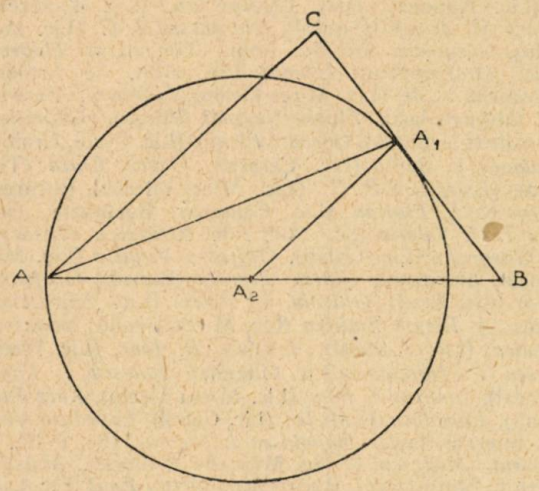
198. — *Intr'un triunghiu* A B C, *latara* A B *este fixă, iar latura* A C *păstrează o lungime constantă. Se cere locul picioarelor bisectoarelor unghiului* A *pe latura opusă:*

D. MARU

Fie triunghiul A B C, în care A_1 este piciorul bisectoarei din A pe latura opusă. Ducem dreapta $A_1 A_2$ paralelă la A C şi observăm uşor că triunghiul $A A_1 A_2$ este isoscel, deci:

(1) $$A_2 A_1 = A A_2$$

Ţinând seamă că $A A_1$ este bisectoare în triunghiul $B A C_1$ putem scri:



$$\frac{A_1 C}{A_1 B} = \frac{A C}{A B} = k \text{ (constant).}$$

Pe de altă parte $A_2 A_1$ fiind paralelă cu $A C$, avem:

$$\frac{A A_2}{A_2 B} = \frac{A_1 C}{A_1 B} = k.$$

sau ţinând seamă de (1), avem:

$$\frac{A_2 A_1}{A_2 B} = k \text{ sau: } \frac{A_2 A_1}{A B} = \frac{k}{k+1}$$

De aci rezultă:

$$A_2 A_1 = \frac{k}{k+1} \cdot A B = \text{constant}$$

Rezultă că locul lui A_1 este un cerc, cu centru în A_2 cu raza $\frac{k}{k+1} \cdot A B_1$ ce trece prin A.

Analog pentru piciorul bisectoarei exterioare unghiului A pe latura opusă.

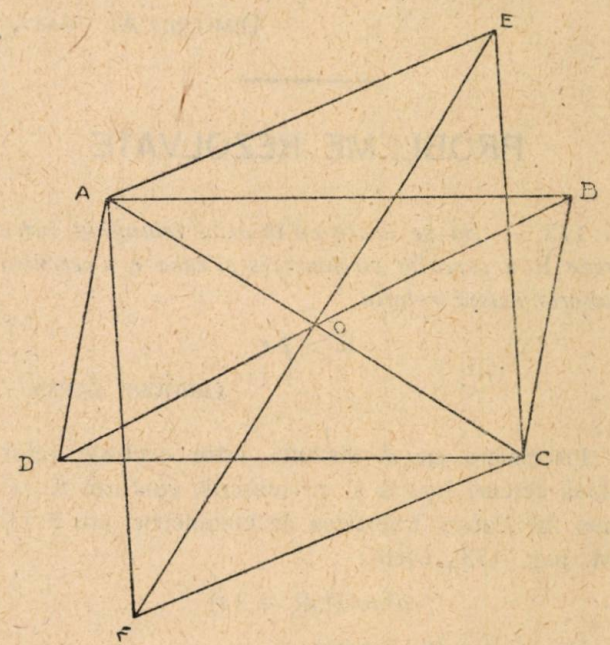
Soluţii date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (Lic. Giurgiu), *Atanasiu I. D-tru* (Lic. M-rea Dealu), *Bărglazan N. Aurel* (Lic. Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Beşchea G. Nicolae* (Lic. Braşov), *Bobărnac C. Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Bonea Ion* (Lic. M-rea Dealu), *Botea G. Nicolae* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Brătescu H. Mihail* (Lic. R.-Vâlcea), *Cocorandu M.* (Lic. Braşov), *Coşereanu Ion* (Piatra-Neamţ). *Dorneanu G. Vasile* (Lic. Internat, Iaşi), *Dospinoiu N.* (Conductor de Lucrări Publice), *Gabrielescu Vasile* (Lic. Brăila), *Georgescu I. N. Valeriu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Lic. Galaţi), *Gheorghiu Gh. Lucian* (Lic. Naţional, Iaşi), *Goldenberg M. I.* (Bârlad), *Haldun Marco* (Galaţi), *Katz Pincu* (Galaţi), *Klein S.* (Galaţi), *Lăzărescu Şt.* (Lic. Giurgiu), *Marinescu M. Ion* (Lic. M-rea Dealu), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Negreţu Florea* (Lic. Piteşti), *Neştianu Gh. Gheorghe* (Lic. M-rea Dealu), *Niculescu Alexandru* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Pantazi G. D-tru* (Lic. Brăila), *Percea Viorel* (Lic. Timişoara), *Popeanu A.* (Constanţa), *Popescu Iancu* (Lic. Internat, Iaşi), *Popovici T. I.*, *Popovici Dan* (Lic. M-rea Dealu), *Rădulescu P. Stelian* (Lic. Giurgiu), *Röder Carol* (Bârlad), *Scodrano Alex.*, *Silion Gh. Ion* (Lic. Braşov), *Smigelschi Octavian* (Lic. Sibiu), *Stamatiu I. Mihail* (Lic. Piteşti), *Stănciulescu George* (Piteşti), *Tauber Alexandru* (Lic. Botoşani), *Tărabuţă C. Paul* (Lic. Mihai-Viteazu, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (Lic. Braşov), *Udrisky Traian* (Lic. Arad), *Vătăşan Ovid* (Lic. Braşov) şi *Zuckermann Bernard* (Bârlad).

Observare. Aceiaşi observare ca acea dela problema 173.

207. — *Prin vârfurile opuse ale unui paralelogram, să se ducă două perechi de drepte paralele, care să formeze un romb. In aceleaşi condiţii să se construiască un patrat.*

E. CARAMAN

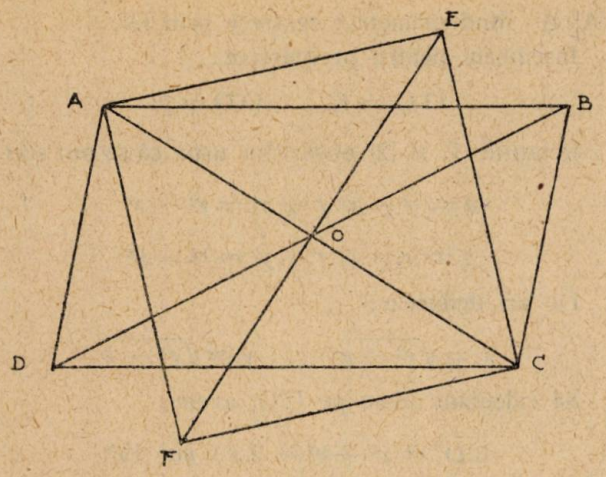
Fie $A B C D$ un paralelogram. Prin vârfurile opuse A, C să ducem perechi de drepte, care să formeze un romb. A şi C fiind două vârfuri opuse



ale rombului, celelalte două vârfuri se găsesc pe o perpendiculară pe $A C$ în mijlocul său O simetric cu O, fiindcă ştim că diagonalele unui romb sunt perpendiculare şi se taie în părţi egale. Vom duce deci o perpendiculară pe $A C$ în mijlocul său O şi vom lua

$$O E = O F$$

Figura $A E C F$ este un romb. Problema are o infinitate de soluţii.



Pentru ca să avem un patrat, facem acei și construcție ca mai sus, luând însă:

$$OE = OF = OA$$

Soluții date de d-nii: *Adam Mircea* (Constanța), *Appel R.* (Galați), *Beju O. Traian* (Lic. Arad), *Bercovici A. Emil* (Lic. Matei-Basarab, București), *Berdan C.* (Bârlad), *Bobărnac C. Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Brătășanu Al. G.* (Caracal), *Ciută Gavril* (Șc. Polit. Timișoara), *Coșereanu Ion* (Piatra-Neamț), *Dospinoiu N.* (Conductor de Lucrări Publice), *Dimitrescu F.* (Lic. Pitești), *Georgescu P. C-tin* (Lic. Mihai-Viteazul, București), *German Coriolan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ghițescu Virgil* (Lic. Mihai-Viteazul, București), *Haldner Marke* (Galați), *Ionescu V. Gh.* (Lic. Galați), *Katz P.* (Șc. Polit., București), *Măru D.* (Lic. Galați), *Oprișean I. G.* (Lic. Arad), *Popea G. Ovidiu* (Lic. Chișinău), *Popovici Th. Ion* (Lic. Mihai-Viteazul, București) *Râmniceanu I. Cristian* (Lic. Milit., Iași), *Savin C. Ioan* (Lic. Milit., Iași), *Udrisky Traian* (Lic. Arad) și *Weiss Leon* (Lic. Galați).

208. — *Se dau un cerc* O, *un punct* I *pe diametrul* A B, *două alte cercuri variabile, care trec unul prin* O *si* A *și altul prin* O, I *și intersecția* M *a precedentului cu primul. Să se găsească locul geometric al intersecției ultimului cerc cu dreapta centrelor celorlalte două cercuri.*

C. RAIBANESCU

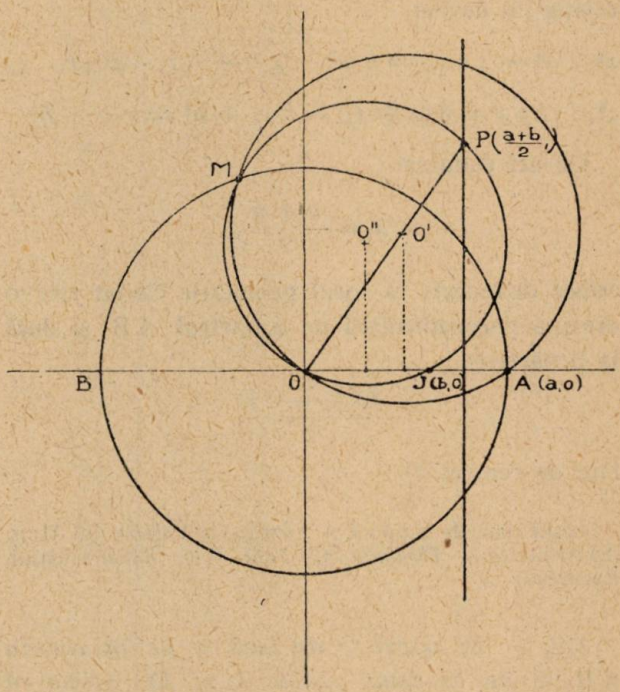
Considerăm ca axe de coordonate, diametrul A B și cel perpendicular pe dânsul. Insemnăm prin (a, o) coordonatele punctului A, prin (b, o) coordonatele punctului I și prin (x_1, y_1) cele ale lui M. Ecuațiile cercurilor O A M și O I M este de forma:

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + A\,x + B\,y = 0$$

Scriind că acest cerc trece prin punctul A (a, o), găsim:

$$A = -a$$

Scriind că cercul (1) trece prin punctul M (x_1, y_1) care se află și pe cercul O, găsim:



$$B = \frac{a\,(x_1 - a)}{y_1}$$

Rezultă că ecuația cercului O A M este:

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - a\,x + \frac{a}{y_1}(x_1 - a)\,y = 0$$

Analog găsim că ecuația cercului O I M este:

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - b\,x + \frac{1}{y_1}(b\,x_1 - a^2)\,y = 0$$

Prin O $(0, 0)$ și $O'\left[\frac{a}{2}, (a - x_1)\frac{a}{2\,y_1}\right]$, ducem dreapta centrelor a cărei ecuație este:

$$(4) \qquad y = \frac{a - x_1}{y_1}\,x$$

Să aflăm acum intersecția dreptei (4) cu cercul (3). Inlocuim în (3) pe y_1 avem:

$$(5) \qquad x^2\left[1 + \frac{(a - x_1)^2}{{y_1}^2}\right] - b\,x + \frac{(b\,x_1 - a^2)(a - x_1)}{{y_1}^2} = 0$$

Ţinând seamă că M (x_1, y_1) este pe cercul O, adică că:

$$y_1^2 = a^2 - x_1^2$$

relaţia (5) devine:

$$x^2 (2a^2 - 2ax_1) = b(a^2 - x_1^2) - (bx_1 - a^2)(a - x_1)$$

$$2ax = b(a + x_1) - bx_1 + a^2 = a(a + b)$$

De aci deducem:

$$x = \frac{a+b}{2},$$

ceiace dovedeşte că locul geometric căutat este o dreaptă perpendiculară pe diametrul AB şi dusă la depărtarea

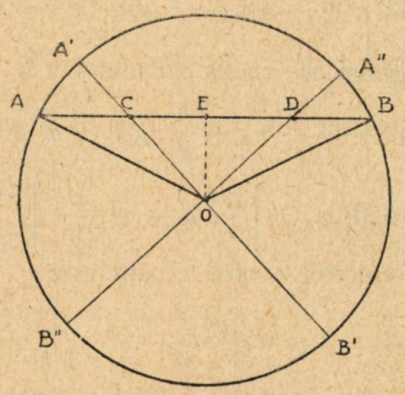
$$\frac{OA + OI}{2},$$

faţă de centrul O.

Soluţii date de d-nii: *I. N. Georgescu-Valeriu* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Tărăbuţă C. Paul* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

212. — *In cercul* O *de rază* r *se ia coarda* AB *şi pe ea două puncte* C *şi* D. *Ştiind că* $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = a$, $\overline{AD} \cdot \overline{DB} = b$ şi $\widehat{COD} = 45^0$, *se cere lungimea coardei* AB. (r, a, b *sunt cunoscute*).

V. ALACI



A'B' fiind un diametru al cercului O ce trece prin C, avem:

(1) $$\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{A'C} \cdot \overline{CB'}$$

La fel deducem:

(2) $$\overline{AD} \cdot \overline{DB} = \overline{A''D} \cdot \overline{DB''}$$

(A''B'' fiind diametrul ce trece prin D).

Insemnăm pentru prescurtare:

$$OC = x, \qquad OD = y.$$

Relaţiile (1) şi (2) observăm uşor că se pot scri:

$$a = (r - x)(r + x) = r^2 - x^2$$

$$b = (r - y)(r + y) = r^2 - y^2$$

De aci deducem:

$$x = \sqrt{r^2 - a} \quad , \quad y = \sqrt{r^2 - b}$$

Să calculăm acum pe CD, avem:

$$\overline{CD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \sin 45^0$$

şi înlocuind pe x şi y, obţinem:

$$CD = \sqrt{2r^2 - (a+b) - \sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}}$$

Calculăm acum înălţimea OE a triunghiului COD, scriind dublul suprafeţei acestui triunghiu, avem:

$$\overline{CD} \cdot \overline{OE} = xy \sin 45^0$$

Inlocuind pe x, y şi CD cu valorile găsite, găsim:

$$OE = \frac{\sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}}{2\sqrt{2r^2 - (a+b) - \sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}}}$$

Din triunghiul dreptunghiu AEO, deducem:

$$\overline{AE}^2 = r^2 - \frac{(r^2 - a)(r^2 - b)}{2(2r^2 - (a+b) - \sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}},$$

deci:

$$AE = \frac{\sqrt{3r^4 - r^2(a+b) - ab - 2r^2\sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}}}{\sqrt{2(2r^2 - a - b - \sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)})}},$$

iar:

$$2AE = AB.$$

Rezultă:

$$AB = \frac{\sqrt{2[3r^4 - r^2(a+b) - ab - 2r^2\sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}]}}{\sqrt{2r^2 - (a+b) - \sqrt{2(r^2 - a)(r^2 - b)}}}$$

Soluţii date de d-nii: *Bobărnac Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Coşereanu Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *I. N. Georgescu-Valeriu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Katz P.* (Şc. Polit. Bucureşti) şi *Tărăbuţă C. Paul* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

213. — *Se consideră cercul cu centrul în punctul (1, 2) și având raza egală cu r. Se cere: 1°. Ecuația tangențială a acestui cerc. 2°. Ce devine acest cerc din punct de vedere punctual și tangențial, când r tinde spre zero?*

E. ABASON

1°. Ecuația tangențială a cercului:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2,$$

se obține scriind că dreapta:

(1) $$ux+vy+w=0$$

este tangentă la acest cerc. Pentru aceasta scrim că distanța de la centrul (1, 2) al cercului la dreapta (1) este r, adică:

(2) $$\frac{u+2v+w}{\pm\sqrt{u^2+v^2}}=r,$$

sau:

$$(u+2v+w)^2=r^2(u^2+v^2)$$

Aceasta este ecuația tangențială a cercului considerat.

2°. Când r tinde spre zero, ecuația punctuală a cercului se reduce la:

$$(x+iy-1-2i)(x-iy-1+2i)=0,\ (i=\sqrt{-1}),$$

adică două drepte imaginare, care se taie în punctul real (1, 2), centrul. Un cerc de rază zero se reduce la izotropele centrului lui.

Făcând în (2) $r=0$, ecuația tangențială devine:

$$(u+2v+w)^2=0,$$

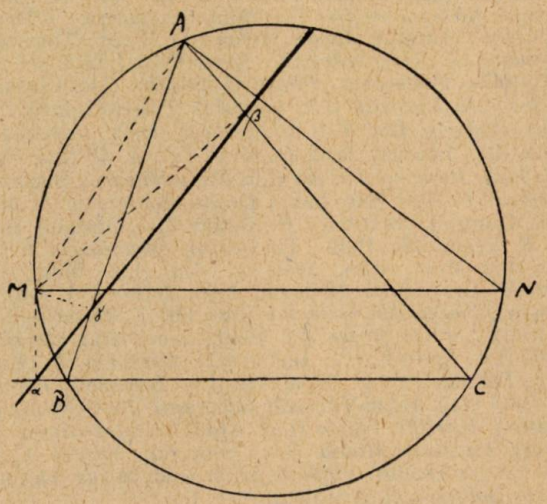
care reprezintă punctul (1, 2) adică centrul, socotit provenit din două puncte confundate.

Soluții date de d-nii: *Antoniu G. Ion* (Lic. Vaslui), *Bărglazan A.* (Lic. Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Coșereanu Ion* (Piatra-Neamț), *Dordea A. Traian*, *Golcea Cornel* (Deva), *Golestein M. I.* (Bârlad), *Katz Pincu* (Galați), *Oprișan E.* (student), *Popovici Th. Ioan*, *Tauber Alexandru* (Lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (Lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu C. Ion* (Lic. M-rea Dealu).

214. — *Se consideră un triunghiu* A B C *și o coardă* M N *a cercului* A B C, *paralelă la latura* B C *a triunghiului. Se cere să se arate, că dreapta lui Simson a punctului* M *în raport cu triunghiul* A B C *este perpendiculară pe dreapta* A N.

SERBAN A GHEORGHIU

Fie α, β, γ, proecțiile punctului M respectiv pe laturile B C, A C, A B a triunghiului dat.



Avem:

$$\overset{\frown}{MA\gamma}=\overset{\frown}{M\beta\gamma},$$

ca având aceiași măsură în patrulaterul inscriptibil A M γ β.

Apoi:

$$\overset{\frown}{MA\gamma}=\overset{\frown}{CAN},$$

ca având aceiași măsură, deci:

$$\overset{\frown}{M\beta\gamma}=\overset{\frown}{CAN}$$

și cum M β este perpendiculară pe A C, urmează că și laturile $\alpha\gamma\beta$ și A N sunt perpendiculare.

Dreapta $\alpha\gamma\beta$ fiind dreapta lui *Simson* a punctului M, proprietatea cerută e demonstrată.

Soluții date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Seminarul Pedagogic, Iași), *Angelescu N*, *Traian* (Lic. Giurgiu), *Atanasiu D-tru* (Lic. M-rea Dealu), *Bărglazan A* (Lic. Sibiu), *Beju O. Traian* (Lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (Lic. R.-Sărat), *Berdan C-tin* (Bârlad), *Blumenfeld M. David* (Lic. Botoșani), *Bobărnac Mircea* (Șc. Polit, Timișoara), *Botea G. Nicolae* (Lic. Cantemir, București), *Brătescu H. Mihail* (Lic. R.-Vâlcea), *Calley M.* (Lic. Mihai-Viteazul, București), *Ciorănescu I. C-tin* (Lic. M-rea Dealu), *Cosniță Cezar* (Lic. Bârlad), *Corșoreanu Gh. Gheorghe*, *Costăchescu V. C-tin* (Lic. Milit., Iași), *Coșereanu Ion* (Piatra-Neamț), *Dânga S. Vladimir* (Șc. Polit., Timișoara), *Dorneanu S. Vasile* (Lic. Internat, Iași), *Gabrielescu Vasile* (Lic. Brăila), *Grabovski Eugeniu* (Lic. Orhei), *Georgescu P. C-tin* (Lic. Mihai-Viteazul, București), *I. N. Georgescu-Valeriu* (Șc. Milit. de Artilerie), *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Lic. Galați), *Ghișoiu I. Petre* (Lic. Spiru-Haret, București), *Gradin I. Gheorghe* (Șc, Polit., Timișoara), *Grofșoreanu I. Gheorghe*

(Arad), *Iliescu D. Emilian*, *Ionescu I. Brezuica* (Şc. Polit., Timişoara), *Ionescu I. Paul* (Lic. M-rea Dealu), *Katz P.* (Galaţi), *Lelescu Luciulus* (Lic. M-rea Dealu), *Manolescu I. Nicolae* (Lic. Focşani), *Marinescu M. Ion* (Lic. M-rea Dealu), *Miclescu Andrei* (Şc. Milit. de Artilerie), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Muşta Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Neştianu Gh. Gheorghe* (Lic. M-rea Dealu), *Orbonaş Iuliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Popea G. Ovidiu* (Lic. Chişinău), *Popescu N. Corneliu* (Lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (Focşani), *Popovici Gh. A.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Popovici C. C-tin* (Lic. Internat, Iaşi), *Popovici Gh. A. C.* (Lic. Naţional, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti). *Popovici P. Dan* (Lic. M-rea Dealu), *Rădulescu P. Marin* (Lic. Giurgiu), *Rădulescu P. Stelian* (Lic. Giurgiu). *Rădulet B. Remus* (Şc. Polit., Timişoara), *Râmniceanu I. Cristian* (Lic. Milit., Iaşi), *Savin C. Ion* (Lic. Milit., Iaşi), *Scripcă Laur* (Lic. Naţional, Iaşi), *Silion Gh. Ion* (Lic. Braşov), *Smigelschi Octavian* (Lic. Sibiu), *Stamatiu Mihail* (Piteşti), *Şteblea Ştefan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stetanescu Emil* (Lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Simionov P. Kindin* (Lic. Tulcea), *Tauber Alexandru* (Lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (Lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăras Vasile* (Lic. Braşov), *Udrisky Traian* (Lic. Arad), *Urzică Aurel* (Lic. Deva), *Vasilescu Mircea* (Lic. Giurgiu), *Vasiliu C. Ion* (Lic. M-rea Dealu), *Vlăduţu Sabin* (Lic. M-rea Dealu) şi *Weiss Solomon* (Lic. Galaţi).

Observare. Aceiaşi observare ca acea de la problema 173

PROBLEME PROPUSE

935. — Să se găsească numărul de trei cifre $a\,b\,c$ ştiind că diferenţa dintre patratul acestui număr şi patratul răsturnatului său este 87912.

A. PURDILA

936. — Se cer numerile $a\,b\,c\,d$ ştiind că suma cifrelor lui este un număr prin egal cu rădăcina patrată a numărului de trei cifre, $d\,(a+1)\,c$.

GEORGE P. BOERESCU

937. — Fie triunghiul oarecare $A\,B\,C$ şi trei ceviene. Paralele din B şi C la ceviana din A tae pe $C\,A$ şi $B\,A$ respectiv în B_1 şi C_1. Să se arate că punctele $(B_1\,C_1, B\,C)$ şi analoagele lui sunt coliniare.

SUB.-LT. A. I. STAN

938. — Fie $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C\,C_1$, cele trei mediane în triunghiul $A\,B\,C$, iar A_2, B_2, C_2 mijloacele lor. Să se arate că prelungind pe $A\,B_2$, $B\,C_2$, $C\,A_2$ până ce întâlnesc laturile triunghiului $A\,B\,C$ în A', B', C', se formează un triunghiu cu o arie de trei ori mai mică decât a lui $A\,B\,C$ şi $A'\,B'$, $B'\,C'$, $C'\,A'$ sunt respectiv paralele cu $B\,B_1$, $C\,C_1$, $A\,A_1$, iar punctul de întâlnire al medianelor triunghiului $A\,B\,C$ este acelaş şi in triunghiul $A'\,B'\,C'$.

NICOLAE N. VELICESCU

939. — Intr'un triunghiu $A\,B\,C$ oarecare, înălţimele $A\,A_1$ $B\,B_1$ şi $C\,C_1$ se întâlnesc în O. Perpendicularele duse din O respectiv pe $C\,C_1$ şi BB_1 întâlnesc laturile $A\,C$ şi $B\,C$ în M şi N, iar laturile $A\,B$ şi $B\,C$ în P şi Q. Să se arate că;

1°. $$\frac{\overline{O\,C_1^2}\cdot\overline{B_1\,A}\cdot\overline{B_1\,M}}{\overline{O\,B_1^2}\cdot\overline{C_1\,A}\cdot\overline{C_1\,P}}=1,$$

2°. $$\frac{\overline{Q\,B}\cdot\overline{P\,A}\cdot\overline{M\,C}\cdot\overline{N\,A_1}}{\overline{P\,B}\cdot\overline{Q\,A}\cdot\overline{N\,C}\cdot\overline{O\,P}}=1,$$

3°. $$\frac{\overline{P\,B}\cdot\overline{Q\,C}\cdot\overline{B\,C}}{\overline{P\,C_1}\cdot\overline{Q\,B}\cdot\overline{B\,A}}=\frac{\overline{B\,B_1^2}}{\overline{B_1\,A^2}}$$

TRAIAN MARINEANU

940. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x^3+y^3+z^3-2\,x\,y\,z=100 \\ x\,y\,(x^3\,z+y^3\,z+z^4)=4800 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

941. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{\operatorname{tg} B-1}{\operatorname{tg} 2\,C-1}=\frac{\operatorname{tg} B+1}{\operatorname{tg} 2\,C+1},$$

ştiind că B şi C sunt unghiurile unui triunghiu dreptunghiu.

EMILIAN MEREUTA

942. — Să se stabilească identitatea:

$$\sin 7\,t-\sin 5\,t+\sin 3\,t-\sin t=$$

$$=64\operatorname{tg} t\prod_{k=1}^{7}\left(\cos t-\cos\frac{k\pi}{8}\right)$$

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

Suntem dureros impresionați de moartea prea timpurie a distinsului profesor de matematică din București, *Ioan Crăciunescu*, membru în Comitetul Revistei noastre. Ca student la Universitatea din București, tânărul *Crăciunescu* se distingea print'un fin spirit matematic, fiind un abil cercetător de lucrări originale, luând chiar premiul Hillel de la Universitate pentru una din lucrările sale.

Exprimăm pe această cale profundul nostru regret și adânca noastră durere, prea întristatei sale familii.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu*.

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș-

---

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul X-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 OCTOMVRIE 1930 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. ION MARGINEANU ASUPRA VARIATIEI FUNCTIUNILOR GONIOMETRICE
2. NOTE MATEMATICE: 18, 19
3. EXAMENUL DE MATEMATICI GENERALE ANUL PREGATITOR
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 752, 896, 897, 900, 901, 903, 904
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească“

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMVRIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

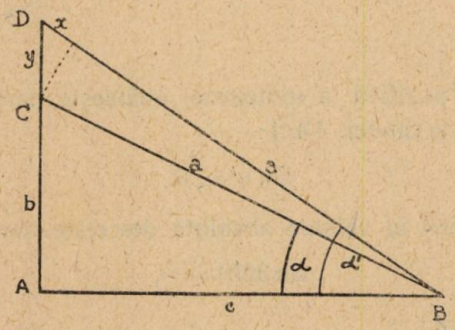
ASUPRA VARIAȚIEI FUNCȚIUNILOR GONIOMETRICE

de ION MARGINEANU

Fie triunghiul dreptunghiu A B C. ($\hat{A} = 90^0$) Se știe că:

$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{b}{a}\ ;\ \cos\alpha = \frac{c}{a}\ ;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c} \\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{c}{b}\ ;\ \sec\alpha = \frac{a}{c}\ ;\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{a}{b} \end{cases}$$

Variația acestor rapoarte, se studiază cu ușurință prin intermediul cercului trigonometric. In cele ce urmează, voiu arăta că variația acestora se poate studia cu succes și fără ajutorul cercului trigonometric. Pentru aceasta, voiu considera pe B C și A C ca pozitive în sensul arătat de săgeți; negative în sens contrar. Fiindcă A B, prin rotirea lui B C în jurul lui B, nu variază, voiu considera-o pozitivă întotdeauna. Aceste fiind stabilite, să rotim pe B C în așa fel ca α să devină α'.



$$\alpha' > \alpha.$$

Atunci și

$$\sin\alpha' > \sin\alpha$$

sau:

$$(1) \qquad \frac{AD}{BD} > \frac{AC}{BC};$$

Din figură se vede că (1) se poate scrie:

$$(2) \qquad \frac{b+y}{a+x} > \frac{b}{a}.$$

Pentru a demonstra relațiunea (2) e destul a arăta că:

$$y > x$$

Triunghiurile A B C, A B D ne dau:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$(a+x)^2 = (b+y)^2 + c^2$$

Efectuând calculele și scăzând membru cu membru egalitatea întâi din a doua obținem:

$$(3) \qquad \frac{x}{y} = \frac{y+2b}{x+2a}$$

Din triunghiul A B C se vede că:

$$(4) \qquad a > b, \qquad \text{sau } 2a > 2b$$

x, nu poate fi decât egal, mai mare sau mai mic decât y. Să luăm cazurile pe rând:

1. $$x = y$$

In virtutea acesteia, din (3) rezultă că:

$$a = b$$

Relația (4) nu admite acest lucru. Deci:

$$x \neq y$$

2. Se presupunem:

$$x > y$$

Din relația (3) ar rezulta că:

$$\frac{x}{y} > 1 \text{ și } \frac{y+2b}{x+2a} < 1$$

ceeace e imposibil în virtutea relației (3), care există. Prin urmare x neputând fi nici egal nici mai

mare decât y, e mai mic. Relaţiile (1) şi (2) sunt prin urmare demonstrate. Deci:

$$\sin \alpha' > \sin \alpha.$$

Adică sinusul creşte deodată cu unghiul.

Când:

$$\alpha = 0, \qquad AC = 0 \ ;$$

prin urmare:

$$\sin 0^0 = 0$$

Dacă:

$$\alpha = 90^0$$

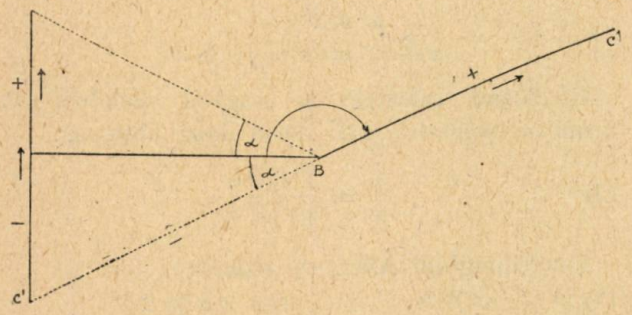
$$x \to \infty \ ; \ y \to \infty$$

fracţiunea:

$$\frac{b+y}{a+x} > \to 1,$$

deci:

$$\sin 90^0 = 1$$



Fie $\alpha' > 90^0$. Din Figura (2) se vede că:

$$\sin \alpha' = \frac{AC'}{BC'} = \frac{-}{-} = +$$

şi e foarte uşor de văzut că trecem descrescând prin aceleaşi valori prin cari am trecut între 0^0 şi 90^0.

$$\sin 180^0 = 0$$

pentrucă:

$$AC' = 0.$$

Din fig. (2) se vede cu uşurinţă că

$$\sin (180^0 - \alpha) = \sin \alpha$$

Dacă:

$$\alpha' > 180^0,$$

partea negativă a ipotenuzei, întâlneşte partea pozitivă a catetei; prin urmare:

$$\sin \alpha' < 0$$

Iar dacă rotim pe BC până când:

$$\alpha' = 270^0$$

trecem prin aceleaşi valori absolute ca între 0^0 şi 90^0.

Deci sinusul descreşte:

$$\sin 270^0 = -1$$

pentrucă:

$$\frac{b+y}{a+x} \to \frac{b+\infty}{a-\infty} \to -1$$

când:

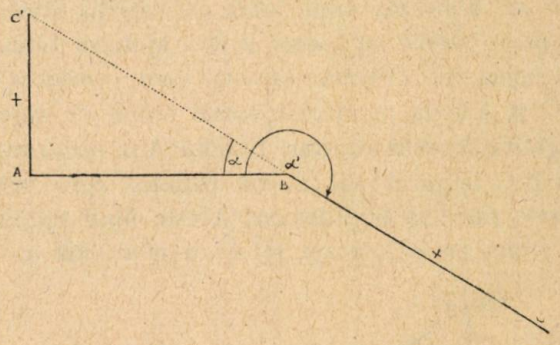
$$\alpha' = 180^0 + \alpha$$

figura (3) ne dă:

$$\sin (180^0 + \alpha) = -\sin \alpha.$$

Dacă:

$$\alpha' > 270^0,$$



partea pozitivă a ipotenuzei întâlneşte partea negativă a catetei. Deci:

$$\sin \alpha' < 0.$$

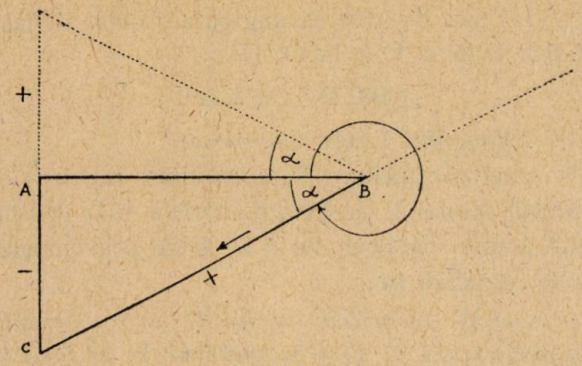
Sinusul în valoare absolută descreşte. Iar:

$$\sin 360^0 = 0,$$

pentrucă:

$$AC' = 0.$$

Rotind pe BC în jurul lui B, se observă că trecem prin aceleaşi valori. Iar dacă în cele patru figuri, rotim pe BC de k ori, obţinem:



$$(5)\quad \begin{cases} \sin(k\,360^0 + \alpha) = \sin\alpha \\ \sin[(2k+1)\,180^0 - \alpha] = \sin\alpha \\ \sin[k\,180^0 + \alpha] = -\sin\alpha \\ \sin[k\,360^0 - \alpha] = -\sin\alpha. \end{cases}$$

Pentru studiul funcţiunei cosinus, e de remarcat că semnul asesteia depinde numai de semnul lui B C.

$$\text{cosin}\,\alpha = \frac{AB}{BC};$$

Din figurile date se observă întotdeauna semnul acestui raport.

Intre 0^0 şi 90^0

$$\frac{AB}{BC} = \frac{+}{+} = +$$

Intre 90^0 şi 270^0

$$\frac{AB}{BC} = \frac{+}{-} = -;$$

deci:

$$\cos\alpha < 0.$$

Când:

$$\alpha > 270^0$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{+}{+} = +.$$

Tot cu ajutorul figurilor se deduc relaţiuni de felul celor din (5).

Tangenta, respectiv semnul ei, depinde de cateta A C.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{AC}{AB};$$

Se vede cu uşurinţă că, dacă:

$180^0 \geqq \alpha \geqq 90^0$, $\quad \frac{AC}{AB} = \frac{-}{+} = -.$

$270^0 \geqq \alpha \geqq 180^0$, $\quad \frac{AC}{AB} = \frac{+}{+} = +.$

$270^0 \leqq \alpha \leqq 360^0$, $\quad \frac{AC}{AB} \frac{-}{+} = -$

Variaţia cotangentei nu prezintă interes, deoarece e aceaşi ca a tangentei.

Secanta, se vede că are acelaş semn ca B C. Iar:

$$\sec 0^0 = 1$$

pentrucă:

$$AB = BC.$$

$$\sin 90^0 = \pm\infty$$

deoarece:

$$\sec\alpha = \frac{BC}{AB} \to \infty \qquad \begin{cases} BC \to \infty \\ AB = \text{constant.} \end{cases}$$

Intre 90^0 şi 270^0

$$\frac{BC}{AB} = \frac{-}{+} = -$$

Şi între 270^0 şi 360^0

$$\frac{BC}{AB} = \frac{+}{+} = +.$$

Studiul cosecantei, nu prezintă interes, deoarece e la fel cu al sinusului. Pentru fiecare funcţiune, după circumstanţe, se pot stabili formule (5).

Se vede prin urmare că variaţia funcţiunilor goniometrice, se poate face cu uşurinţă, fără ajuturul cercului trigonometric.

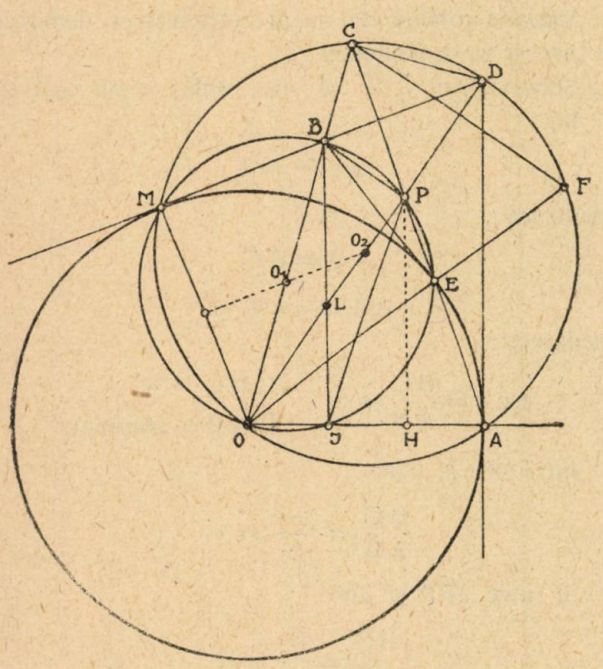
NOTE MATEMATICE

18. — *Soluţia geometrică a problemei 208.* La pagina 81. Vol. X. al *R. M. T.*, s'a dat o soluţie analitică următoarei probleme:

„Se dau un cerc O, *un punct* I *pe diametrul* O A, *alte două cercuri variabile, care trec unul prin* O *şi* A *şi altul prin* O, I *şi intersecţia* M *a precedentului cu primul. Să se găsiască locul*

geometric al intersecției ultimului cerc cu dreapta centrelor celorlalte două cercuri".

Problema se poate rezolva foarte ușor pe cale elementară. In afară de notațiile din enunț, fie încă: O_1, O_2 centrele celor 2 cercuri variabile; E intersecția lui O_1 cu O; P și D intersecțiile lui O_1 și O_2 cu OO_2; B și C intersecțiile lui OO_1 cu O_1 și O_2; F intersecția lui O E cu O_2; L intersecția lui O P cu B I; H mijlocul lui I A.



Dreapta O D fiind diametru în O_2 unghiurile O M D și O A D sunt drepte, deci D M și D A sunt tangente în M și A la O. Cum A este fix rezultă că

1°. *Locul lui* D *este tangenta în* A *la* O.

De asemeni O B fiind diametru în O_2 dreptele B M și B E sunt tangente în M și E la O. Rezultă:

2°. *Punctele* M, B, D, *sunt colineare.*

Unghiul B I O fiind drept se deduce că:

3°. *Locul lui* B *este perpendiculara în* I *pe* O A.

Unghiurile O P B și O C D sunt drepte ca fiind înscrise în semicercuri O_1 și O_2. Deci B P e perpendicular pe O D. — Apoi:

$$\sphericalangle BLD = \sphericalangle ODA$$

ca alterne interne iar:

$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle ODB$$

căci O D este bisectoarea unghiului format de tangentele D M și D A la O. Deci:

$$\sphericalangle BLD = \sphericalangle LDB$$

4°. *Triunghiul* L B D *este isoscel.*

In acest caz piciorul P al înălțimei B P este și mijlocul laturei L D. Cum punctele L și D descriu două drepte paralele, iar L D trece prin punctul fix O, urmează că:

5°. *Locul geometric al lui* P *este o dreaptă perpendiculară pe* O A *în mijlocul* H *al lui* I A.

Proprietatea 5° este tocmai locul geometric cerut de problema 208.

Figura mai are și alte proprietăți interesante. Din patrulaterul O E P B înscris în O_1 se deduce:

$$\sphericalangle OPE = \sphericalangle OBP = \sphericalangle OBM$$

ultimile două unghiuri fiind egale căci O B este bisectoarea unghiului M B E. Dar avem încă:

$$\sphericalangle OBM = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CPD$$

din patrulaterul înscris B P D C. Cele 2 șiruri de egalități din urmă dau:

$$\sphericalangle OPE = \sphericalangle CPD$$

ceia ce arată că

6°. *Punctele* C_1 P, E *sunt colineare.*

Patrulaterele O E P B, P B C D și apoi O F D C dau succesiv:

$$\sphericalangle CEF = \sphericalangle OBP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle CDO = \sphericalangle OFC$$

de unde rezultă că:

7°. *Triunghiul* E C F *este isoscel.*

Din patrulaterul înscris O A D C rezultă:

$$\sphericalangle ODA = \sphericalangle OCA = \sphericalangle OCP$$

ceia ce arată că:

8°. *Dreapta* C P E *trece prin* A.

Triunghiul A O E fiind isoscel avem:

$$\sphericalangle EAO = \sphericalangle AEO = \sphericalangle CEF$$

și ținând seamă de relațiile care au condus la stabilirea proprietății 7° se găsește:

$$\sphericalangle EAO = \sphericalangle OBP = \sphericalangle AIP$$

9°. *Triunghiul* I P A *este isoscel.*

Pe baza proprietății 9° se regăsește locul lui P de la 5°, loc care este perpendiculara pe mijlocul H al bazei I A a triunghiului isoscel I P A.

Mă opresc aici. — Figura are şi alte proprietăţi interesante, care se pot demonstra pe cale elementară.

Angajez pe corespondenţii, care posedă cunoştinţe de geometrie analitică să caute interesantele locuri geometrice ale punctelor C şi F.

COL. GH. BUICLIU

---

19. *Asupra triunghiurilor cu laturile în progresie geometrică.*

In cele ce urmează voiu arăta proprietăţile mai importante pe cari le-am găsit între elementele unui triunghiu cu laturile în progresie geometrică.

1°. Plecând dela relaţia fundamentală:

$$b\,c = a^2$$

obţinem uşor:

(1) $h_b\,h_c = h_a^2$; (2) $\sin B \sin C = \sin^2 A$

2°. Se şiie că:

$$4\,R\,s = a\,b\,c$$

deci:

$$4\,R\,s = a^3$$

3°. Se cunosc relaţiile.

$$2\,R = \frac{b\,c}{h_a} = \frac{c\,a}{h_b} = \frac{a\,b}{h_c}$$

deducem întâiu:

$$2\,R\,h_a = a^2$$

apoi:

$$h_a + h_b + h_c = \frac{a\,p}{R.}$$

4. Ridicând precedenta la patrat şi ţinând seamă de (1) avem:

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = (h_a + h_b + h_c)^2 -$$

$$2\,(h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a) = \frac{a^2\,p^2}{R^2} - \frac{2\,h_a\,a\,p}{R}$$

$$\therefore \quad (3) \qquad h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = r_b\,r_c \cdot \frac{a^2}{R^2}$$

5°. La fel avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - a\,b + b\,c + c\,a) =$$

$$(4) \qquad 4\,p\,(p - a) = 4\,r_b\,r_c$$

6°. Impărţînd (4) prin (3) avem:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} = \frac{4\,R^2}{a^2} = \frac{a^2}{h_a^2} = \frac{b^2 + c^2}{h_b^2 + h_c^2} = \frac{1}{\sin^2 A}$$

7°. Continuând:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = (\sin A + \sin B + \sin C)^2$$

$$- 2\,(\sin A \sin B + \sin B \sin C + \sin C \sin A)$$

$$\therefore \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = (\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$(\sin B + \sin C - \sin A)$$

şi cum

$$\sin A = \frac{a}{2\,R} \text{ ; etc. avem:}$$

$$(5) \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{p\,(p - a)}{R^2} = \frac{r_b\,r_c}{R^2}$$

8°. Imparţind (4) prin (5) avem:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} = 4\,R^2 = \frac{a^2}{\sin^2 A} =$$

$$\frac{b^2 + c^2}{\sin^2 B + \sin^2 C}$$

9°. Ţinând seamă că:

$$\sin 2\,A + \sin 2\,B + \sin 2\,C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

obţin:

$$\sin 2\,A + \sin 2\,B + \sin 2\,C = 4 \sin^3 A = \frac{a^3}{2\,R^3}$$

10°. Din relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

obţin succesiv:

$$2\,(a^2 - a^2 \cos A) = b^2 + c^2 + 2\,b\,c - a^2 =$$

$$4\,p\,(p - a) = 4\,r_b\,r_c$$

$$\therefore \quad a^2 \cos^2 \frac{A}{2} = r_b\,r_c$$

şi

$$b\,c - r_b\,r_c = \sin^2 \frac{A}{2}$$

11°. Inlocuind în relaţia:

$$b\,c = a^2$$

$a = (p - b) + (p - c)$; $b = (p - c) + (p - a)$; etc.

şi împărţind apoi cu s obţin:

$$\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b r_a}+\frac{1}{r_a r_c}=\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}+\frac{1}{r_c r_b}$$

12°. Ridicând la patrat relaţia:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$$

şi ţinând seamă de precedenta am:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{r_a^2}+\frac{1}{r_b r_c}+3\left(\frac{1}{r_c r_a}+\frac{1}{r_a r_b}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)=\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_b r_c}+\frac{1}{r_c r_a}$$

sau:

$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)=$$

$$\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_b r_c}+\frac{1}{r_c r_a}$$

13. In acelaş mod avem:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+2\left(\frac{1}{h_a h_b}+\frac{1}{h_b h_c}+\frac{1}{h_c h_a}\right)$$

$$=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}+2\cdot\frac{1}{h_a}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$$

sau încă:

$$\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)=\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$$

14°. In fine dacă două triunghiuri cari satisfac relaţiilor:

$$a^2=b\,c,\qquad a_1^2=b_1\,c_1$$

şi au două laturi proporţionale atunci sunt asemenea:

1. $$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$$

de unde deducem:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}=\frac{c_1}{a_1}=\frac{c}{a}\therefore\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c},\quad \text{q. e. d.}$$

2. $$\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}\therefore\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}=\frac{\sqrt{b_1 c_1}}{\sqrt{b\,c}}=\frac{a_1}{a}\quad \text{q. e. d.}$$

Acestea sunt relaţiile mai interesante ce le-am găsit în triunghiurile geometric progresive.

N. GEORGESCU-ROEGEN

EXAMENUL DE MATEMATICI GENERALE ANUL PREGĂTITOR

Seziunea Septembrie 1930.

I.

1°. Să se studieze variaţia funcţiunii:

$$y=\mathrm{L}\sqrt[6]{\frac{x^2-x+1.}{(x+1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1.}{\sqrt{3}}-\operatorname{arc\,tg}x.$$

şi să se reprezinte curba variaţiunii. (L = log. nep.)

2°. Să se deducă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiunii $y=0$ precum şi intervalele în cari ele sunt cuprinse.

3°. Să se găsiască expresia lui $\cos\alpha$ în funcţiune de abscisa x, a unui punct M al curbei precedent construite, determinându-se semnul lui $\cos\alpha$ pentru valorile lui x, cuprinse între -1 şi $+1$ (α reprezintă unghiul format de tangenta în M la curba data cu O X).

II.

Se dă ecuaţia $f(x)=x^3+p\,x+q=0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

1°. Se cere să se formeze ecuaţia $\varphi(x)=0$ admiţând ca rădăcini cantităţile:

$$x'=\frac{x_1-1.}{x_2+x_3}\quad x''=\frac{x_2-1.}{x_1+x_3}\quad x'''=\frac{x_3-1.}{x_1+x_2}$$

2°. Să se găsiască condiţia ca ecuaţia $\varphi(x)=0$ să admită o rădăcină dublă, în care caz să se rezolve. — Să se explice rezultatul găsit.

III.

Să se determine α şi p astfel ca expresiunea:

$$\mathrm{E}=\frac{f(a+h)-f(a-h)+\alpha\,h\,f'(a)}{h^p}$$

să tindă către o limită finită şi determinată când $h\to 0$.

Aplicaţie pentru $f(x)=\mathrm{L}\,x$.

Notă. Chestiunea I obligatorie, din ultimele două una la alegere.

Timpul acordat $3^1/_2$ ore.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXV, No. 12, August 1930. Sur un thèorème de *Droz—Farny*, par *V. Thébault*. Adevărata curbă „para", de *Col. Gh. Buicliu*. Raza de curbură a desfăşuratei elipsei, de *E. Arghiriadi*. Asupra unor serii convergente, de *Ioan V. Măties*.

2. *Gazeta Matematică* anul YXXVI, No. 1, Sept. 1930. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică". Membrii decedaţi. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice". Premiul *Inginer H. Capriel:* Sur un cercle associé au triangle, par *V. Thébault*.

PROBLEME REZOLVATE

752. — *Să se găsească un patrat perfect de opt cifre știind că numărul format de primele patru cifre este cu 100 unități mai mare ca numărul format de ultimile patru cifre.*

N. G. BOTEA

Fie N numărul format de ultimile patru cifre și N_1^2 pătratul căutat. Potrivit enunțului trebuie să avem egalitatea:

(1) $$(N+10^2).10^4+N=N_1^2$$

care poate fie scrisă sub forma următoare:

(2) $$N.10001,=N_1^2-10^6$$

sau încă:

(3) $$73.137.N=(N_1+10^3)(N_1-10^3)$$

Observăm deci că numerile prime 73 și 137 divid produsul $(N_1+10^3)(N_1-10^3)$ și că N_1^2 fiind de opt cifre, rădăcina sa, N_1, este mai mică decât 10^4, deci că 10001 nu poate fi divizor al lui (N_1-10^3).

Așadar, α și β fiind două numere întregi, ce urmează a fi determinate, problema poate avea soluțiuni în următoarele trei ipoteze:

I) $N_1+10^3=10001.\alpha$, $N<10^4$;

II) $N_1+10^3=73\alpha$; $N_1-10^3=137\beta$; $N<10^4$;

III) $N_1+10^3=137\alpha$; $N_1-10^3=73\beta$; $N<10^4$.

Să examinăm pe rând aceste trei ipoteze.

I). Având $N_1+10^3=10001\alpha$, rezultă egalitetea:

$$N=(N_1-10^3)\alpha,$$

dar $N<10^4$, deci $(10001\alpha-2\times10^3)\alpha<10^4$.

Așa dar a fiind întreg pozitiv și satisfăcând inegalității $10001\alpha^2-2.10^3\alpha-10^4<0$, avem condițiunea:

$$0<\alpha<\frac{1000+100\sqrt{10001}}{10001}$$

și prin urmare $\alpha=1$.

Rezultă imediat că $N_1=9001$ și $N=8001$, astfel că problema admite în acest caz o singură soluțiune:

$$81018001=9001^2.$$

II. Având $N_1+10^3=73\alpha$, $N_1-10^3=137\beta$, $N<10^4$, deducem în primul rând că:

(4) $$2N_1=73\alpha+137\beta$$

egalitate care poate avea loc numai dacă α și β sunt de aceiași paritate. Apoi scriind că valorile lui N_1 sunt egale, deducem egalitatea:

(5) $$73\alpha-137\beta=2\times10^3$$

Dar numerele întregi și pozitive α și β trebuie să satisfacă condițiunilor: $73\alpha-10^3<10^4$ sau $137\beta+10^3<10^4$ sau, încă $73\alpha+11000$ sau $137\beta<9000$.

Pentru a rezolvă în numere întregi ecuațiunea (5), o scriem sub forma:

(5') $$73(\alpha-\beta)-64\beta=2^4.5^3;$$

deci $(\alpha-\beta)$ trebuie să fie divizibil cu 16; punând prin urmare:

(6), $$\alpha-\beta=16t$$

problema revine la a rezolva în numere întregi și pozitive ecuațiunea:

$$73t-4\beta=5^3$$

sau încă:

(7) $$4\beta=73t-125$$

unde t este întreg impar mai mare ca *unu*.

Dar din condițiunea de mai sus $\beta<65$, deci:

(8) $$73t-125<260$$

sau încă:

(9) $$t\leqq5.$$

Făcând $t=3$ obținem $4\beta=94$ care n'are soluțiuni întregi; făcând apoi $t=5$ avem $4\beta=240$ sau încă $\beta=60$, deci $\alpha=140$, care dau soluțiunea $N_1=9220$, $N=\alpha.\beta=8400$, deci:

$$85008400=9220^2.$$

III. Considerând acum ultima ipoteză, deducem ca mai sus că α și β sunt deaceiași paritate; apoi deducem ecuațiunea în numere întregi pozitive:

(11) $$137\alpha-73\beta=2.10^3$$

sau încă:

(12) $$73(\alpha-\beta)+64\alpha=2^4.5^3$$

care poate fi satisfăcută numai dacă $\alpha - \beta = 16t$, în care caz ecuațiunea devine:

$$(14) \qquad 4\alpha = 125 - 73t$$

t fiind întreg, impar, pozitiv sau negativ

Având $137\alpha < 11000$, avem $4\alpha < 320$, deci $-2 \leqq t \leqq +1$ prin urmare $t = +1$ sau $t = -1$. In ambele cazuri problema nu are soluțiuni.

Rezumând vedem că problema propusă admite două soluțiuni

$$N_1^2 = 81008001 \text{ și } N_1^2 = 85008400.$$

Au găsit prima soluțiune Dnii *Ghișoiu I. Petre, Ionescu Țiu D. Ctin, Nichiforescu Gh.*

A găsit a doua soluțiune Dl *Almăjan Petru.*

A dat un început de soluțiune bună Dl *Savin C. I.*

O. N. Ț.

896. — *Să se calculeze suma:*

$$S = 10 + 20\,20 + 30\,30\,30 + \ldots + n\,0\,n\,0 \ldots n\,0$$

IOAN GH. POPA

Suma S se mai poate scri:

$$S = 10 + 2(10 + 10^3) + 3(10 + 10^3 + 10^5) + \\ + \ldots + n(10 + 10^3 + 10^5 + \ldots 10^{2n-1})$$

Termenii din paranteze formând progresii geometrice cu rația 10^2, ușor putem scri:

$$S = \frac{10^3 - 10}{10^2 - 1} + 2\frac{10^5 - 10}{10^2 - 1} + 3\frac{10^7 - 10}{10^2 - 1} + \\ + \ldots + n\frac{10^{2n+1} - 10}{10^2 - 1}$$

$$= \frac{10^3 + 2.10^5 + 3.10^7 + \ldots + n.10^{2n+1} - n.10}{10^2 - 1}$$

$$= \frac{10^3[1 + 2.10^2 + 3.10^4 + \ldots + n.10^{2(n-1)}] - n.10}{10^2 - 1}$$

Pentru a calcula cantitatea:

$$1 + 2.10^2 + 3.10^4 + \ldots + n.10^{2(n-1)}$$

considerăm progresia geometrică însumată:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Derivând în raport cu x, obținem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \\ \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

Făcând aci $x = 10^2$, găsim:

$$1 + 2.10^2 + \ldots + n.10^{2(n-1)} = \\ \frac{(n+1)10^{2n}(10^2 - 1) - 10^{2(n+1)} + 1}{(10^2 - 1)^2}$$

Atunci S devine:

$$S = \frac{10^3[(n+1).10^{2n}(10^2 - 1) - 10^{2(n+1)} + 1] - 10n(10^2 - 1)^2}{(10^2 - 1)^3}$$

sau:

$$S = \frac{1000[99.100^n(n+1) - 100^{n+1} + 1] - 98010n}{970299}$$

Aceasta este expresia sumei cerute.

Soluții date de d-nii: *Crivăț I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, București), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (Șc. Polit., București), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenița), *Jeba C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Marineanu Traian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanța) și *Motoc D. Mircea* (Lic. Oltenița).

Observare. Soluția de mai sus este redactată după acea dată de d-l *Marineanu Traian* (student, București), care a calculat prin aceiași metodă și suma mai generală:

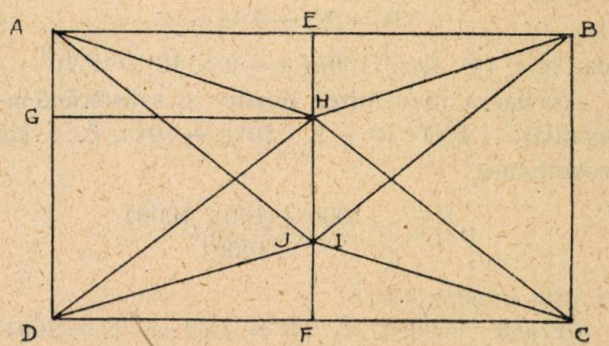
$$S = a_1 + a_2\,m\,a_2 + a_3\,m\,a_3\,m\,a_3 + \ldots + a_p\,m\,a_p \ldots m\,a_p,$$

unde:

$$a_2 = a_1 + 1,\ a_3 = a_1 + 2, \ldots .\ a_p = a_1 + (p-1).$$

897. — *Se dă dreptunghiul* A B C D. *Se duce dreapta* E F *care unește mijloacele lui* A B *și* D C. *Printr'un punct* G *de pe* A D *se duce o paralelă la* A B *care întâlnește pe* E F *în* H. *Să se demonstreze că vârfurile* I *și* J *ale paralelogramelor* A H C I *și* B H D J *concid și se află pe* E F. *Să se calculeze aria trapezului* A H I D *cunoscând* A B = *a*, A D = *b*, A G = *c*.

V. ALACI



Fie A B C D dreptunghiul dat, E F dreapta ce unește mijloacele laturilor A B, D C și G H K o paralelă la A B.

Pentru a construi paralelogramul a cărui trei vârfuri sunt A, H, C ducem prin A o paralelă la H C până întâlneşte pe E F în I. Fiindcă triunghiurile dreptunghice A E I şi H K C sunt egale, având A E = H K şi $\sphericalangle$ E A I = $\sphericalangle$ K H C având laturi paralele, rezultă că A I = H C şi cum ele sunt şi paralele, urmează că figura A H C I este un paralelogram. Punctul I se află deci pe E F. La fel demonstrăm că punctul J se află tot pe E F.

Fiindcă:

$$A H = H B,$$

rezultă din cele două paralelograme:

$$I C = J D.$$

Punctele I şi J concid, fiindcă există un singur punct pe E F egal dapărtat de D şi C.

Rămâne să mai calculăm aria trapezului A H I D. Observăm pe figură:

$$\text{aria}\,.\,A H I D = \frac{A D + H I}{2}\,.\,G H =$$

$$\frac{b + (b - 2c)}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a(b-c)}{2}$$

Soluţii date de d-nii: *Antonescu P. Aurel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Băcicov Boris* (Lic. Tighina), *Boerescu P. George* (Lic. Oltenita), *Cosniţă Cezar* (Bârlad), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Derenbaum M.* (Lic. Tighina), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Ghilezan A. Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ionescu D. Ion* (Şc. Normală, Bucureşti), *Jeba C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lascu I.* (Lic. Milit., Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Marcu Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea*, *Nagler Mayer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Patron Mihail* (Lic. Milit., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă A.* (Lic. Braşov), *Savin C. Ion* (Şc. Milit. de Artilerie), *Savin C. Petru* (Lic. Milit., Iaşi), *Sasărman S. Emil* (Şc. Polit., Timişoara), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Vasu Vasile*, *Velicescu N. Nicolae* şi *Velicescu Titu* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

Au mai trimes soluţiuni dnii: *Codreş I. Florian* (bacalaureat), *Ionescu P. Haralamb* (absolvent, Lic. Oltenita), *Oelze Emil* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara).

900. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum (x-y)(x+y+2z)(x+y-z)^2 =$$

$$4(x-y)(z-y)(x+y+z)$$

CEZAR COSNITA

Considerăm determinatul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x+y-z)^2 & (x+z-y)^2 & (y+z-x)^2 \\ (x+y)^2 & (x+z)^2 & (y+z)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

pe care dezvoltând'ul după elementele primei linii, observăm uşor că obţinem tocmai primul membru al identităţii. Să căutăm acum să'l exprimăm pe Δ în formă de produs.

Scăzând elementele primei coloane pe rând din elementele celorlalte, găsim:

$$\Delta = 4(z-y)(z-x)\begin{vmatrix} x & y \\ 2x+y+z & x+2y+z \end{vmatrix}$$

$$= 4(z-y)(z-x)(x^2-y^2+xz-yz)$$

$$= 4(z-y)(z-x)(x-y)(x+y+z)$$

Avem stabilit astfel tocmai identitatea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Andreescu Alexandru* (Lic. Mitit., Iaşi), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscăleecu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghilezan A. Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. Nicolae* (Lic. Constanţa), *Nagler Mayer* (Lic. Naţional, Iaşi), *Oelze Emil* (Şc. Polit., Timişoara), *Patepeanu C. Ioan* (Lic. Braşov), *Patron M.* (Lic. Milit, Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă A.* (Lic. Braşov), *Rusu D. C-tin* (Constanţa), *Savin C. Ion* (Şc. Milit., Iaşi), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Velicescu N. Nicolae* şi *Velicescu G. Titu* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

901. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

ştiind că rădăcinele sale x_1, x_2, x_3 *satisfac relaţia,*

$$x_1 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1 + x_3}$$

şi care este relaţia dintre coeficienţi?

AURELIAN I STAN

Relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi şi relaţia dată, sunt:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \\ x_1x_2x_2 = -r \\ x_1(x_2 + x_3) = x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$$

Ţinând seamă de aceste relaţii, observăm că:

$$x_2^2+x_3^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2=(x_1+x_2+x_3)^2-$$

$$2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1^2=p^2-2q-x_1^2,$$

şi:

$$x_1(x_2+x_3)=-x_1(p+x_1)$$

Inlocuind în ultima relaţia din (1), avem:

$$-x_1(p+x_1)=p^2-2q-x_1^2$$

$$p^2-2q+px_1=0$$

De aci rezultă:

$$x_1=\frac{2q-p^2}{p}$$

Inlocuind pe x_1 în primele două relaţii din (1), găsim:

$$\begin{cases} x_2+x_3=-\dfrac{2q}{p} \\ x_2x_3=q-x_1(x_2+x_2)=\dfrac{q(4q-p^2)}{p^2} \end{cases}$$

Rădăcinele x_2, x_3 sunt deci rădăcinele ecuaţiei:

$$z^2+\frac{2q}{p}z+\frac{q(4q-p)}{p^2}=0$$

sau:

$$p^2z^2+2pqz+q(4q-p^2)=0$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt:

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q(p^2-3q,}}{p}$$

Rezultă că rădăcinele ecuaţiei date sunt:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{2q-p^3}{p} \\ x_2=\dfrac{-q+\sqrt{q(p^2-3q)}}{p} \\ x_3=\dfrac{-q-\sqrt{q(p^2-3q)}}{p} \end{cases}$$

Inlocuind pe x_1 şi x_2x_3 în relaţia:

$$x_1x_2x_3=-r,$$

obţinem relaţia de condiţie:

$$q(p^2-4q)(p^2-2q)+p^3r=0.$$

Soluţii date de d-nii: *Antonescu Aurel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Băcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Cosniţă Cezar* (Bârlad), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăseălescu Hristache* (Şc Polit., Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghilezan A. Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ionescu P. Haralambie* (Lic. Oltenita), *Jeba C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanţa), *Savin C. Ion* (Sc. Milit. de Artilerie), *Savin C. Petru* (Lic. Milit., Iaşi), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Vasu Vasile* şi *Velicescu G. Titu* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

903. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^3+\frac{2ar_a}{r-r_a}x^2+\frac{(h_a+h_b+h_c)bc}{h_a}x-\frac{8s^2p}{\sum h_ah_b}=0,$$

notaţiile fiind cele obicnuite într'un triunghiu. Când ecuaţia are o rădăcină triplă?

VLADIMIR I. CRIVETZ

In baza relaţiilor cunoscute:

$$r=\frac{s}{p},\ r_a=\frac{s}{p-a},\ h_a=\frac{bc}{2R},\ R=\frac{abc}{4s}$$

şi a analoagelor lor, coeficienţii lui x^2, x şi termenul liber din ecuaţia dată, se pot scri:

$$(1)\quad \frac{2ar_a}{r-r_a}=2a\frac{\dfrac{s}{p-a}}{\dfrac{s}{p}-\dfrac{s}{p-a}}=-2p=-(a+b+c)$$

$$(2)\quad \frac{(h_a+h_b+h_c)bc}{h_a}=\frac{\dfrac{bc+ac+ab}{2R}bc}{\dfrac{bc}{2R}}=$$

$$ab+bc+ca$$

$$(3)\quad \frac{8s^2p}{\sum h_ah_b}=\frac{8s^2p}{\dfrac{bc}{2R}\cdot\dfrac{ac}{2R}+\dfrac{bc}{2R}\cdot\dfrac{ab}{2R}+\dfrac{ac}{2R}\cdot\dfrac{ab}{2R}}=$$

$$\frac{32s^2pR^2}{abc(a+b+c)}=\frac{16s^2R^2}{abc}=$$

$$\frac{s^2}{abc}\left(\frac{abc}{4s}\right)^2=abc$$

In virtutea relaţiilor (1), (2), (3), ecuaţia dată se poate scri:

$$(4)\quad x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

Observăm uşor că această ecuaţie este verificată de $x=a$, $x=b$, $x=c$.

Rădăcinele ecuaţiei (4) şi deci a ecuaţiei date, sunt:

$$x_1=a, \quad x_2=b, \quad x_3=c.$$

Ecuaţia dată are o rădăcină triplă, evident când avem:

$$a=b=c,$$

adică când triunghiul este echilateral.

Soluţii date de dnii: *Alexandrescu N.* (Lic. Milit., Iaşi), *Băcicov Boris* (student) *Cuciureanu Şt.* (Lic. Milit., Iaşi), *Dăscălescu Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghilezan A. Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (Lic. Oltenita), *Ionescu P. Haralamb* (Lic. Oltenita), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara), *Mereuţă Emilian* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihaileanu N.* (Lic. Constanţa), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti). *Parepeanu Ioan* (Lic. Braşov), *Patron Mihail* (Lic. Milit., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă Anton* (Lic. Braşov), *Russu D. Ctin* (Constanţa), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Teodorescu Stavrache* (Lic. Milit., Iaşi), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Velicescu N. Nicolae*, şi *Velicescu Gh. Titu* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

904. — *Să stabilească identitatea:*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(\sin kx-\cos kx)}{\sum_{k=1}^{n}(\sin kx+\cos kx)}=tg\left(\frac{n+2}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$$

EMILIAN MEREUTA

Observăm că putem scri:

$$\sin kx-\cos kx=\sin kx-\sin\left(\frac{\pi}{2}-kx\right)=$$

$$2\sin\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}$$

(1)

$$\sin kx+\cos kx=\sin kx+\sin\left(\frac{\pi}{2}-kx\right)=$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)$$

Insemnând cu E primul membru al identităţii date, putem scri ţinând seamă de relaţiile (1) şi simplificând:

(2)
$$E=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)}{\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Folosim relaţiile cunoscute care ne dau suma sinusurilor şi suma cosinusurilor unor arce în progresie aritmetică (Compléments de trigonométrie, par F. G. M., pag. 43—44), anume:

$$\sin a+\sin(a+h)+\cdots+\sin[a+(n-1)h]=\frac{\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$\cos a+\cos(a+h)+\ldots.+\cos[a+(n-1)h]=\frac{\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

Dacă în aceste relaţii luăm:

$$a=x-\frac{\pi}{4}, \quad h=x,$$

obţinem:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(kx-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Inlocuind aceste valori în relaţia (2) şi simplificând obţinem:

$$E=tg\left(\frac{n+1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right),$$

adică tomai identitatea cerută.

Soluţii date de dnii: *Antonescu P. Aurel* (Şc. Polit., Bucureşti), *Codreş I. Florian* (bacalaureat), *Cosniţă Cezar* Bârlad), *Crivăţ I. Vladimir* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Dimitriu At. Ion* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghilezan A. Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit., Bucureşti), *Grecu M. Hristache* (Lic. Oltenita), *Ionescu P. Haralamb*

(Oltenița) *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihaileanu N. Nicolae* (Lic., Constanța), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, București), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Savin C. Ion* (Șc. Milit. de Artilerie), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara), și *Velicescu Titu* (Lic. Matei-Basarab, București).

Observare: Unul din corespondenți a scris relația eronată:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x .. + \sin nx = \frac{\sin x + \sin nx}{2} . n,$$

considerând primul membru ca o progresie aritmetică.

Dacă arcele $x, 2x, \ldots nx$ sunt în progresie aritmetică, nu rezultă că sunt și sinusurile lor tot în progresie aritmetică.

PROBLEME PROPUSE

943. — Un patrat perfect de cinci cifre are prima cifră 9. Să se găsească acest patrat perfect știind că dacă mutăm pe 9 la sfârșitul numărului obținem tot un patrat perfect.

A. PURDILA

944. — Autobuzul de pe linia „Obor-Posta Centrală" din București pleacă de la „Obor" cu un număr oarecare de persoane făcând pe taxator să încaseze suma de 30 lei, costul biletului fiind același pe orice porțiune de linie. La fiecare stație se dau jos două persoane și se urcă trei.

Se cere numărul persoanelor cu care a plecat autobuzul, știind că a sosit la poștă cu 12 persoane, iar taxatorul are în geantă 156 lei.

NICOLAE și TITU VELICESCU

945. — Două cercuri ortogonale O și O' se intersectează în A și B. Din A se duc diametrele AC și AD respectiv în cercurile O și O'. Tangenta în C la cercul O se intersectează cu OO' în E. Tangenta dusă din E la cercul O se intersectează cu AD în F și atinge cercul O în G.

Să se demonstreze că:

1°. Triunghiul EFO' este isoscel.

2°. FO este perpendiculară pe EO'.

3°. Segmentul CBD este egal și paralel cu EO'.

VLADIMIR I. CRIVAT

946. — Fie $ABCD$ un patrulater oarecare, iar E punctul de intersecție a diagonalelor. Să se arate că avem:

$$\frac{\overline{ED}(\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2) + \overline{BE}(\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2)}{\overline{AE} - \overline{CE}} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

947. — Suma a șase termeni întregi, pozitivi în progresiune aritmetică este 60. Să se afle acei termeni.

Suma a patru termeni întregi, pozitivi în progresiune geometrică este 45. Să se afle acei termeni.

948. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z + u = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 170 \\ x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 1764 \\ xy = zu \end{cases}$$

M. N. GRINBERG

949. — In triunghiul ABC în care $AC = 1$, $\hat{A} = 45^0$ și $\hat{C} < 90^0$, se duce din C o dreaptă care tae pe AB în D, astfel că:

$$\overset{\frown}{DCA} = \frac{\hat{C}}{3}$$

Din B și D se duc pe AC perpendicularele BB_1, DD_1 și se notează:

$$BB_1 = a, \qquad DD_1 = b.$$

Se cere să se stabilească relațiunea:

$$a = \frac{3b - 6b^2 + 2b^3}{1 - 6b^2 + 4b^3}$$

Care este relația corespunzătoare, dacă $\hat{C} > 90^0$?

V. ALACI

959. = Să se stabilească identitatea:

$$\frac{1}{p} \sum r_a \cot A \cdot \cot B \cdot \cot \frac{A}{2} + p^2 s \prod \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{R}{2ps} \sum a h_a \sin A + \frac{16Rr}{p^2} \prod r_a \cos^2 \frac{A}{2},$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

TRAIAN MARINEANU

INFORMAȚIUNI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu*.

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul X-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 NOEMVRIE 1930 NO. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CAP. I LINTES CATEVA PROBLEME DEDUSE CU AJUTORUL PROGRESIUNILOR ARITMETICE
2. NOTE MATEMATICE: 20, 21
3. EXAMEN DE INTRARE IN ANUL PREPARATOR
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 805, 869, 874, 905, 909, 919, 920
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — No. 9. TIMISOARA, 15 NOEMVRIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

CATEVA DE PROBLEME DEDUSE CU AJUTORUL PROGRESIUNILOR ARITMETICE

de CAP. I. LINTEȘ

Fie:

$$\div a_1 .\quad a_2 .\quad a_3 \ldots . a_n$$
$$\div b_1 .\quad b_2 .\quad b_3 \ldots . b_n$$

două progresiuni aritmetice, având aceiași rație și același număr de termeni.

1. Imi propun să sumez primii n termeni ai șirului:

$$a_1 b_1 , \qquad a_2 b_2 , \qquad a_3 b_3 \ldots \qquad a_n b_n$$

format prin produsul celor doi termeni de același rang al progresiunelor date mai sus.

Pentru aceasta să scrim succesiv progresiunele sub forma:

$$\div a . \qquad (a+r) . \quad (a+2r) \ldots [a+(n-1)r]$$
$$\div b . \qquad (b+r) . \quad (b+2r) \ldots [b+(n-1)r]$$

unde r este rația ambelor progresii și $a_1 = a$, $b_1 = b$.

Făcând produsele obținem:

$$a\,b, [ab + r(a+b) + r^2], [ab + 2r(a+b) + 4r^2],$$
$$\ldots . [ab + (n-1)r(a+b) + (n-1)^2 r^2]$$

Insemnând cu $S_{(ab)}$ suma, avem:

$$S_{(ab)} = n . ab + r(a+b)[1+2+3+\ldots+(n-1)] + r^2[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2]$$

sau:

$$(1) \qquad S_{(ab)} = n a_1 b_1 + r(a_1+b_1)\frac{(n-1)n}{2} + r^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

2. Să mai luăm acum și progresia:

$$\div c_1 . \quad c_2 . \quad c_3 \ldots c_n$$

în aceleași condițiuni ca primele două și să ne propunem a însuma primii n termeni a șirului:

$$a_1 b_1 c_1 . \quad a_2 b_2 c_2 . \ldots . \quad a_n b_n c_n$$

Dar conform substituțiilor admise mai sus, acest șir mai poate fi scris:

$$abc, [abc + r(ab+ac+bc) + r^2(a+b+c) + r^3]$$
$$[abc + 2r(ab+ac+bc) + 4r^2(a+b+c) + 8r^3]$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$
$$[abc + (n-1)r(ab+ac+bc) + (n-1)^2 r^2(a+b+c) + (n-1)^3 r^3]$$

sau făcând suma, avem:

$$S_{(abc)} = n\,abc + r(ab+ac+bc)[1+2+3+\ldots+(n-1)] + r^2(a+b+c)[1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2] + r^3[1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3]$$

sau:

$$(2) \quad S_{(abc)} = n\,a_1 b_1 c_1 + r(a_1 b_1 + a_1 c_1 + b_1 c_1)\times\frac{(n-1)n}{2} + r^2(a_1+b_1+c_1)\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + r^3\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2$$

Procedând analog pentru patru, cinci, etc. ... progresiuni aritmetice, vom obține pentru m progresiuni aritmetice șirul:

$$\underbrace{a_1 b_1 c_1 \ldots l_1}_{m} , \quad \underbrace{a_2 b_2 c_2 \ldots l_2}_{m} , \quad \ldots \underbrace{a_n b_n c_n \ldots l_n}_{m}$$

a cărei sumă a primelor n termeni va fi:

$$(3) \quad S_{(a,b,c\ldots l)} = n\,\Pi a_1 + r\,\Sigma\underbrace{a_1 b_1 \ldots k_1}_{m-1}\Sigma(n-1) +$$

$$r^2 \Sigma \underbrace{a_1 b_1 . , . j_1}_{m-1} . \Sigma (n-1)^2 + \ldots .$$

$$\ldots + r^{m-1} \Sigma a_1 \Sigma (n-1)^{m-1} + r^m \Sigma (n-1)^m$$

Aplicaţiune.

Fie progresiunele aritmetice:

$$\begin{array}{llllll} \div 1. & 2. & 3. & 4. \ldots . & n \\ \div 2. & 3. & 4. & 5. \ldots . & (n+1) \\ \div 3. & 4. & 5. & 6. \ldots . & (n+2) \\ \div 4. & 5. & 6. & 7. \ldots . & (n+3), \end{array}$$

unde înmulţind termenii de acelaş rang obţinem şirul:

$$24, 120, 360, 840, \ldots . \; n(n+1)(n+2)(n+3)$$

şi să ne propunem a suma primii n termeni, atunci avem conform formulei (3)

$$S_{(1,2,3,4)} = n . \Pi 1 + s . \Sigma 1 . 2 . 3 . \Sigma 1 +$$

$$1^2 . \Sigma 1 . 2 . \Sigma 1^2 + 1^3 \Sigma 1 . \Sigma 1^3 + 1^4 . \Sigma 1^4$$

sau:

$$S_{(1,2,3,4)} = 24 n + 30 n (n-1) +$$

$$\frac{35 (n-1) n (2n-1)}{6} + \frac{5 (n-1)^2 n^2}{2} +$$

$$\frac{(n-1) n (6 n^3 - 9 n^2 + n - 1)}{30}$$

sau:

$$S_{(1,2,3,4)} = \frac{3 n^5 + 30 n^4 + 106 n^3 + 224 n^2 - 2 n}{15}$$

* * *

4. Să revenim iarăşi la primele două progresiuni şi să admitem că au acelaş număr de termeni, însă au raţii diferite, în acest caz un şir de forma:

$$a_1 b_1, \qquad a_2 b_2, \ldots \qquad a_n b_n$$

ar putea fi scris:

$$a b, \quad [a b + r_b a + r_a b + r_a r_b],$$

$$[a b + 2 (r_b a + r_a b) + 4 r_a r_b],$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$[a b + (n-1)(r_a a + r_b b) + (n-1)^2 r_a r_b]$$

unde r_a este raţia primei progresiuni, r_b raţia progresiunei a doua.

Suma primilor n termeni ai unui astfel de şir va fi:

$$(4) \quad S_{(a,b)} = n a_1 b_1 + (r_b a + r_a b_1) \frac{(n-1) n}{2} +$$

$$r_a r_b . \frac{(n-1) n (2n-1)}{6}$$

5. Asemenea se poate însuma un şir de forma:

$$a_1 b_1 c_1, \quad a_2 b_2 c_2, \quad \ldots . a_n b_n c_n$$

unde raţiile progresiunelor vor fi r_a, r_b, r_c, atunci suma va fi:

$$(5) \quad . S_{(a,b,c)} = n a_1 b_1 c_1 + (r_a b_1 c_1 + r_b a_1 c_1 +$$

$$r_c a_1 b_1) \frac{(n-1) n}{2} + (r_a r_b c_1 + r_a r_c b_1 + r_b r_c a_1) \times$$

$$\frac{(n-1) n (2n-1)}{6} + r_a r_b r_c . \left[\frac{(n-1) n}{2}\right]^2$$

6. Şi dacă considerăm m progresiuni aritmetice cu raţiile r_a, r_b, $r_c \ldots r_l$, atunci suma primilor n termeni ai şirului:

$$a_1 b_1 \ldots l_1, \quad a_2 b_2 \ldots l_2, \ldots a_n b_n \ldots l_n$$

va fi:

$$(6) \; S_{(a,b,\ldots,l)} = n \Pi a_1 + \Sigma r_a b_1 c_1 \ldots l_1 . \Sigma (n-1) +$$

$$\Sigma r_a r_b c_1 \ldots l_1 . \Sigma (n-1)^2 +$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$+ \Sigma r_a r_b \ldots r_k l_1 . \Sigma (n-1)^{m-1} + \Pi r_a . \Sigma (n-1)^m$$

Cu aceasta dau expresia generală a însumărei termenilor unui şir format în condiţiunele mai sus văzute şi care constitue isvorul unei serii numeroase de probleme: *Asupra şirurilor numerice.*

* * *

Observaţiuni. 1. In această ordine de idei, cercetând dacă din progresiunele:

$$\begin{array}{llll} \div a_1 . & a_2 . & a_3 \ldots & a_n \\ \div b_1 . & b_2 . & b_3 \ldots & b_n \end{array}$$

având acelaş număr de termeni şi aceiaşi raţie şi formând şirul:

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{b_3}, \quad \ldots . \frac{a_n}{b_n}$$

s'ar putea suma primii n termeni.

Sumarea însă este imposibilă căci prima serie de transformări ne conduce la expresiunea:

$$(7)\quad S_{\frac{a}{b}} = 2n\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{1}{2}\right)-(a_1-b_1)\left[\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1+r}+\frac{1}{b_1+2r}+\ldots+\frac{1}{b_1+(n-1)r}\right]$$

ori paranteza mare, reprezintă tocmai o *progresie armonică*[1], a căror sumă nu poate fi reprezentată printr'o expresiune simplă.

2. Cercând a suma un şir compus astfel:

$$\frac{a_1}{b_1 b_2},\quad \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2 b_3},\quad \frac{a_1 a_2 a_3}{b_1 b_2 b_3 b_4},$$

$$\ldots\ \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_n}$$

din cele două progresiuni, am găsit că suma acestor termeni este:

$$(8)\quad S_{\frac{\Pi a_1}{\Pi b_1 b_2}} = \frac{1}{r}\left[\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}\right]$$

deci poate fi exprimată prin o expresiune simplă, r fiind raţia comună celor două progresiuni.

După câte îmi amintesc această ultimă însumare, nu-mi aparţine ca originalitate, fiind cunoscută în *Cezaro*, sau nu ştiu în ce altă carte împrejurările în care scriu acest articol nepermiţându-mi a dispune decât de un Hütte.

Expresiuni şi şiruri interesante pot să fie nesfârşit deduse analog metodelor de mai sus, lucru pe care îl aşteptăm dela corespondenţii noştri.

[1]) *Progresie armonică.* se numeşte progresia formată de inversul termenilor unei progresii aritmetice. Trei termeni consecutivi ai ei, satisfac raportul armonic.

NOTE MATEMATICE

20. *Asupra problemei 842.*

In „Revista Matematică Timişoara" IX. 133 s'a arătat că expresiunea:

$$E = 3740356^{20} + 1934^{24} - 1934^{4} - 1,$$

se divide cu $143 = 11 \times 13$.

In cele următoare voiu arăta că această expresiune este divizibilă în afară de 143 şi cu 123165.

Conform soluţiei citate expresiunea se poate scrie:

$$(1)\quad E = 1934^{40} + 1934^{24} - 1934^{4} - 1.$$

Divizorul lui E, adică 123165 se poate scrie:

$$123165 = 5 \times 7 \times 9 \times 17 \times 23;$$

pentru demonstraţie ne vom folosi de teorema lui *Fermat* că: *p fiind prim şi a prim cu p avem:*

$$(2)\quad a^{p-1} - 1 = m.p$$

In virtutea acestei teoreme avem:

$$[(1934^6)^4 - 1] + [(1934^{10})^4 - 1] - [1934^4 - 1] = m.5$$

$$[1934^4((1934^6)^6 - 1)] + [(1934^4)^6 - 1] = m.7$$

Pentru a arăta acum că expresiunea (1) se divide cu 9 vedem că $1934 = m.9 - 1$ deci avem:

$$E = (m.9-1)^{40} + (m.9-1)^{24} - (m.9-1)^4 - 1 = m.9 + 1 + 1 - 1 - 1 = m.9.$$

Pentru a arăta că E este multiplu de 17 observăm că:

$$1934^2 = 3740356 = m.17 - 1$$

deci avem:

$$E = (m.17-1)^{20} + (m.17-1)^{12} - (m.17-1)^2 - 1 = m.17$$

Pentru a arăta că E este multiplu de 23 avem:

$$1934 = m.23 + 2$$

deci:

$$E = 2^{40} + 2^{24} - 2^4 - 1 + m.23 = 1024^4 + 1024^2 - 17 + m.23 = 12^4 + 12^2 - 17 + m.23 = 144^2 + 144 - 17 + m.23 \therefore E = -6 - 17 = m.23.$$

Reese deci că expresiunea se divide cu:

$$17612595 = 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 17 \times 23.$$

HARALAMB P. IONESCU

21. — *Asupra problemei 819.* In această notă îmi propun să dau un exemplu mai general al problemei 819, rezolvată în *R. M.* vol. IX. No. 9 pag. 105 .

Fie de calculat suma:

$$S = 11011 + 220022 + 3300033 + \ldots\ldots + \overline{nn\ldots oo\ldots nn}$$

Soluție:

Suma S mai poate scrie:

$$S = (10^4 + 10^3 + 10 + 1) + 2(10^5 + 10^4 + 10 + 1) + 3(10^6 + 10^5 + 10 + 1) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + n(10^{n+3} + 10^{n+2} + 10 + 1) = (10 + 1)(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n) + (10^4 + 10^3) + 2(10^5 + 10^4) + 3(10^6 + 10^5) + \ldots\ldots + n(10^{n+3} + 10^{n+2}) = (10 + 1)(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n) + 10^3(10 + 1) + 2.10^4(10 + 1) + 3.10^5(10 + 1) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + n.10^{n+2}(10 + 1) = (10 + 1)\left[\frac{n(n+1)}{2} + 10^3 + 2.10^4 + 3.10^5 + \ldots + n.10^{n+2}\right]$$

$$11\left[\frac{n(n+1)}{2} + 10^3(1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + n.10^{n-1})\right]$$

Se știe însă că suma:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$$

In cazul nostru $x = 10$. Suma S devine:

$$S = 11\left[\frac{n(n+1)}{2} + 10^3\,\frac{(n+1).10^n(10-1) - 10^{n+1} + 1}{(10-1)^2}\right] =$$

$$11\left[\frac{n(n+1)}{2} + 10^3 \cdot \frac{9.10^n(n+1) - 10^{n+1} + 1}{81}\right]$$

expresia sumei căutate.

Generalizare. — Voiu presupune acum cazul cel mai general.

Fie de calculat suma:

$$S = a_1 a_1 m a_1 a_1 + a_2 a_2 m m a_2 a_2 + a_3 a_3 m m m a_3 a_3 + \ldots\ldots + a_p a_p m \ldots m a_p a_p,$$

unde:

$$a_2 = a_1 + 1\,;\; a_3 = a_1 + 2\,,\; a_p = a_1 + (p-1).$$

Suma S se mai poate scrie:

$$S = a_1(1 + 10 + 10^3 + 10^4) + 10^2 m + a_2(1 + 10 + 10^4 + 10^5) + m(10^2 + 10^3) + a_3(1 + 10 + 10^5 + 10^6) + m(10^2 + 10^3 + 10^4) + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + a_p(1 + 10 + \ldots\ldots + 10^{p+2} + 10^{p+3}) + m(10^2 + 10^3 + \ldots + 10^{p+1})$$

Suma S se poate descompune în alte 2 sume S_1 și S_2

$$S_1 = (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_p)(1 + 10) + a_1(10^3 + 10^4) + a_2(10^4 + 10^5) + a_3(10^5 + 10^6) + \ldots$$

$$\ldots + a_p(10^{p+2} + 10^{p+3})\,.$$

Inlocuind valorile lui a_2, a_3 etc.

$$S_1 = (1 + 10)\{a_1 + (a_1 + 1) + (a_1 + 2) + \ldots\ldots + [a_1 + (p-1)]\} + (1 + 10)\{a_1.10^3 + (a_1 + 1)10^4 + (a_1 + 2).10^5 + \ldots + [a_1 + (p-1)]\,10^{p+2}\}$$

sau încă:

$$S_1 = 11[p\,a_1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1)] + 11\,a_1(10^3 + 10^4 + \ldots\ldots + 10^{p+2}) + 11[10^4 + 2.10^5 + \ldots\ldots + (p-1).10^{p+2}]$$

$$S_1 = 11\left[p\,a_1 + \frac{(p-1)p}{2}\right] + 11.10^3 a_1(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{p-1}) + 10^4.11[1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots\ldots + (p-1).10^{p-1}]$$

Pentru suma:

$$1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (p-1).10^{p-2},$$

cunoșteam:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1} =$$

BIBLIOTECA „ASTRA" SIBIU

$$\frac{(n+1).x^n(x-1)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}$$

Când $x=10$, iar $n=p-1$, avem:

$$1+2.10+3.10^2+\ldots+(p-1).10^{p-2}=$$

$$\frac{p.10^{p-1}(10-1)-10^p+1}{(10-1)^2}$$

Suma S_1 devine:

$$S_1=11\left[p\,a_1+\frac{(p-1)p}{2}\right]+11.10^3.a_1\frac{10^p-1}{10-1}+$$

$$11.10^4\frac{p.10^{p-1}9-10^p+1}{81}$$

Valoarea lui S_2 va fi:

$$S_2=m[10^2+(10^2+10^3)+(10^2+10^3+10^4)+$$

$$\ldots+(10^2+10^3+\ldots+10^{p-1})$$

$$S_2=m\left[\frac{10^3-10^2}{10-1}+\frac{10^4-10^2}{10-1}+\frac{10^5-10^2}{10-1}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{10^{p+2}-10^2}{10-1}\right]$$

sau:

$$S_2=m\left[\frac{10^3+10^4+\ldots+10^{p+2}-p.10^2}{9}\right]=$$

$$m\left[\frac{\frac{10^{p+3}-10^3}{10-1}-p.10^2}{9}\right]$$

$$S_2=m\left[\frac{10^{p+3}-10^3-9p.10^2}{81}\right]$$

Adunând sumele S_1 și S_2 avem:

$$S=S_1+S_2.$$

$$S=11\left[p\,a_1+\frac{(p-1)p}{2}\right]+11.10^3\,a_1\frac{10^p-1}{9}+$$

$$11.10^4\frac{p.10^{p-1}.9-10^p+1}{81}+$$

$$m\left[\frac{10^{p+3}-10^3-9p.10^2}{81}\right],$$

sau făcând reducerile necesare, avem:

$$S=11\,a_1\left[\frac{9p+10^{p+3}-10^3}{9}\right]+$$

$$11\left[\frac{(p-1)p}{2}+\frac{9p.10^{p+3}-10^{p+4}+10^4}{81}\right]+$$

$$m\left[\frac{10^{p+3}-10^3 9p.10^2}{81}\right].$$

Când $a_1=1$ și $m=0$, avem soluția problemei care am dat-o ca exemplu mai înainte.

TRAIAN MARINEANU

SCOALA POLITECHNICĂ, TIMIȘOARA

Chestiuni propuse la examenul de intrare în anul pregătitor, Octombrie 1930.

Aritmetică.

Capitalul C împrumutat pe timp de 8 luni și 10 zile, aduce o dobândă care reprezintă $\frac{1}{16}$ din valoarea capitalului împrumutat. Se cere:

1°. Procentul cu care a fost împrumutat capitalul.

2°. Valoarea capitalului C știind că dacă l'am fi împrumutat pe timp de 2 ani cu un procent care ar fi $\frac{2}{3}$ din procentul precedent, am fi putut cu dobânda obținută, cumpara un teren de cultură de formă drepunghiulară având un perimetru de 480 m. și lățimea $\frac{3}{5}$ din lungime. arul fiind socotit pe prețul de 240 lei. (Dobânda se consideră simplă).

(8—12)

Algebră și Trigonometrie.

I.

O persoană a cumpărat un număr oarecare de portocale cu același preț fiecare și a dat pe ele 32,50 lei.

Pe drum întâlnește pe rând mai mulți copii și fiecare capătă câte două portocale, dar imediat ce dă unuia două portocale, cumpără în locul lor alte trei de același preț fiecare ca și cele dela început.

Ajungând acasă constată că are 11 portocale și a cheltuit în total 149,50 lei.

Se cere, câte portocale a cumparat la început acea persoană, câți copii a întâlnit și cât a costat fiecare portocală.

II.

Se dă un triunghiu dreptunghiu A B C, al cărui perimetru este 24 m., iar dublul suprafeței 48 m². Se cere să se calculeze.

1°. Laturile triunghiului dreptunghiu.

2°. Înălțimea A D dusă din A și segmentele A D și D B de pe ipotenusă.

3°. Unghiurile B și C ale triunghiului.

4°. Razele cercurilor înscrise în triunghiurile A B D și A D C.

(3—6)

Geometrie.

Pe perimetrul unui paralelogram A B C D se alege un sens determinat și se construiesc pe laturile opuse perechi de triunghiuri — egale și orientate în același fel față cu sensul ales — anume:

(A M B şi C P D); (B N C şi D Q A)

1°. Să se arate că în toate cazurile de figură posibile (ambele perechi către exteriorul paralelogramului, sau ambele către interiorul paralelogramului, sau una către interiorul şi cealaltă către exteriorul paralelogramului), patrulaterul M N P Q este un paralelogram.

2°. Dacă (M_1, M_2) şi (M_3, M_4) sunt perechile de puncte unde dreapta M P taie respectiv perechile de laturi opuse (A B, C D) şi (B C, D A) avem egalitatea:

$$\overline{M_1 M_3} = \overline{M_2 M_4}$$

3°. O fiind punctul de întâlnire al diagonalelor paralelogramului A B C D, se construesc cercurile A O B, B O C, C O D, D O A iar segmentele exterioare (de exemplu) paralelogramu'ui, acestor cercuri se înscriu triunghiurile isoscele A M B, B N C, C P D, D Q A. Să se arate că paralelogramul M N P Q este un romb.

4°. Să se arate că în afară de perechile de triunghiuri isoscele, considerate mai sus, există o infinite de grupe de triunghiuri egale (A M B, C P D) şi (B N C, D Q A), oarecare, pentru care paralelogramul M N P Q este un romb.

5°. Să se construiască două perechi d triunghuri egale (A M B, C P D) şi (B N C, D Q A) astfel ca paralelogramul M N P Q să fie un dreptunghiu.

Asemenea să se construiască două perechi de triunghiuri egale (A M B, C P D) şi (B N C, D Q A) astfel ca paralelogramul M N P Q să fie un patrat.

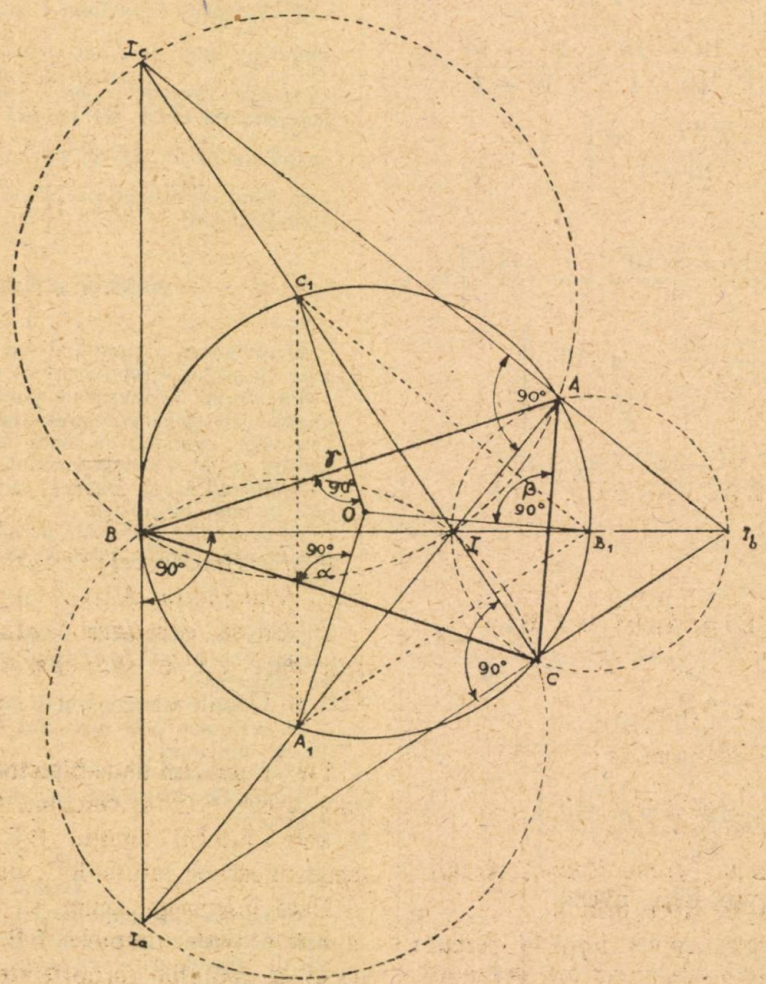
(8—12)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, No. 2, Octomvrie 1930. Asupra uşor formule pentru calculul cu aproximaţie al ariilor, de *Ernest Abason*. Determinarea eforturilor suferite de un avion în picaj vertical, de *Căpitan I. Linteş*.

PROBLEME REZOLVATE

805. — *Mediatoarele unui triunghiu* A B C *întâlnesc cercul* O, *circumscris acestui triunghiu, în punctele* A_1, B_1, C_1. *Să se arate că cercurile descrise din centrele* A_1, B_1, C *şi având respectiv*



ca raze $\overline{A_1B}$, $\overline{B_1C}$, $\overline{C_1A}$, *trec prin centrul* I *al cercului înscris triunghiului* ABC. *Punctele* I_a, I_b, I_c *diametral opuse lui* I *în cercurile* A_1, B_1, C_1. *sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului considerat.*

JUSTIN N. VALCEANU

Soluțiunea I^a. Mediatoarele OA_1, OB_1, OC_1 ale triunghiului ABC împart respectiv arcele BC, CA, AB, în două părți egale, deci AA_1, BB_1, CC_1, sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor A, B, C, care, după cum știm, trec toate prin punctul I. Ducând acum bisectoarele exterioare ale unghiurilor A, B, C, ele formează un triunghiu $I_aI_bI_c$, ale cărui vârfuri sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC. Patrulaterele $BICI_a$, $CIAI_b$, $AIBI_c$ sunt inscriptibile, din cauza proprietății cunoscute, că bisectoarele uni unghiu sunt perpendiculare una pe alta.

Centrele cercurilor $BICI_a$, $CIAI_b$, $AIBI_c$ sunt respectiv A_1, B_1, C_1, mijloacele ipotenuzelor $\overline{II_a}$, $\overline{II_b}$, $\overline{II_c}$, deoarece mediatoarele respective taie aceste ipotenuze în A_1, B_1, C_1.

Am obținut astfel, sub altă formă, proprietățile cerute în problema propusă.

Soluțiunea II^a. AI, BI, CI sunt bisectoarele interioare ale unghiurilor A, B, C, și în consecință trec prin punctele A_1, B_1, C_1 mijloacele arcelor $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$. Unghiul BIA_1, fiind exterior triunghiului BIA, avem:

$$(1)\qquad \overset{\frown}{BIA_1} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{ABC}\right)$$

Asemenea avem:

$$(2)\quad \overset{\frown}{A_1BI} = \overset{\frown}{A_1BC} + \overset{\frown}{CBI} = \overset{\frown}{A_1AC} + \overset{\frown}{CBI} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{BAC} + \overset{\frown}{ABC}\right)$$

Comparând (1) cu (2) deducem că:

$$(3)\qquad \overset{\frown}{BIA_1} = \overset{\frown}{A_1BI}$$

Așadar, triunghiul BA_1I *fiind isoscel*, cercul, de centru A_1 și rază $\overline{A_1B}$, trece prin I.

Luând acum I_a diametral opus lui I în cercul A_1 dreapta I_aB, fiind perpendiculară pe BI (unghiul I_aBI înscris într'un semicerc este drept), este bisectoarea exterioară a unghiului CBA_1. Așadar, I_a, fiind iniersecțiunea bisectoarei interioare a unghiului A cu bisectoarea exterioară a unghiului B, este centrul cercului exînscris triunghiului ABC relativ la latura BC. Analog demonstrăm pentru celelalte cercuri B_1 și C_1.

Observare. Dnii: *Vâlceanu Justin* și *Coșnița Cezar* observă că AA_1 (axul radical al cercurilor B_1 și C_1) este perpendicular pe B_1C_1 și deduc că triunghiul ortic LMN al triunghiului $A_1B_1C_1$ este omotetic cu triunghiul ABC,, raportul de omoteție fiind $\frac{1}{2}$.

Au dat soluțiunea a II-a Dnii: *Coșnița Cezar, Ghișoiu I. Petre, Ionescu-Țiu D. Ctin., Mihăileanu N. N., Grossu I. Mircea, Ionescu-Biss P. Haralambie.*

A dat o soluțiune analoagă cu prima Dl *Hamerak Carol* (Caransebeș).

O. N. T.

869. — *Fie* O *centrul cercului circumscris unui triunghiu oarecare* ABC, *iar* A', B', C' *picioarele înălțimilor sale* AH, BH, CH. *Cercul cu centrul în* A' *și cu rază* A'A, *taie semidreptele paralele, duse din* A' *la semidreptele* BO *și* CO, *respectiv în* B_a *și* C_a.

1°. *Să se demonstreze că punctul* S_a, *de întâlnire al dreptelor* BB_a *și* CC_a, *aparține bisectoarei unghiului* BAC.

2°. *Dacă* S_b *și* S_c *sunt punctele analoage lui* S_a, *să se arate că avem relațiunea:*

$$\frac{\overline{OS_a}}{\overline{S_aA'}} + \frac{\overline{OS_b}}{\overline{S_bB'}} + \frac{\overline{OS_c}}{\overline{S_cC'}} = \frac{R}{r},$$

R *și r fiind razele cercurilor circumscris și înscris triunghiului* ABC.

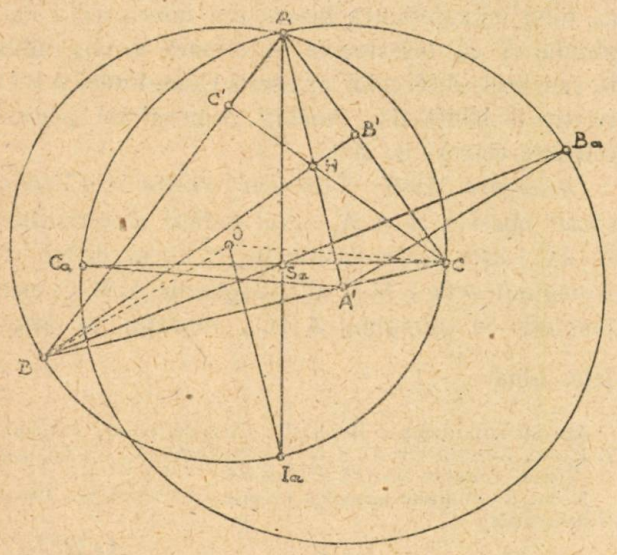
3°. *Să se examineze cazul în care semidreptele duse din* A' *sunt paralele cu semidreptele* OB *și* OC.

OVIDIU ȚINO

Fie I_a punctul unde bisectoarea unghiului BAC taie arcul BC al cercului O. Este cunoscut că I_a este mijlocul arcului BC și că OI_a este perpendiculară pe latura BC, deci paralelă cu AA'.

Dacă însemnăm acum cu S_a, S'_a S''_a respectiv punctele unde dreptele BB_a, CC_a, AI_a taie pe OA' și amintim proprietatea că într'un trapez

raportul segmentelor unei diagonale este egal cu raportul bazelor adiacente, considerând trapezele



$OBA'B_a$, $OCA'C_a$, $OAA'I_a$ putem scrie următoarele relaţiuni:

$$(1)\qquad \frac{\overline{OS_a}}{\overline{S_aA'}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{A'B_a}}=\frac{R}{h_a},\ \frac{\overline{OS'_a}}{\overline{S'_aA'}}=\frac{\overline{OC}}{\overline{A'C_a}}=\frac{R}{h_a}$$

$$,\frac{\overline{OS''_a}}{\overline{S''_aA'}}=\frac{\overline{OI_a}}{\overline{A'A}}=\frac{R}{h_a}$$

h_a fiind măsura înălţimii $\overline{AA'}$.

Din relaţiunile (1) deducem imediat următoarele:

$$(2)\qquad \frac{\overline{OS_a}}{\overline{S_aA'}}=\frac{\overline{OS'_a}}{\overline{S'_aA'}}=\frac{\overline{OS''_a}}{\overline{S''_aA'}}=\frac{R}{h_a},$$

apoi din (2) pe următoarele:

$$(3)\qquad \frac{\overline{OS_a}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OS'_a}}{\overline{OA'}}=\frac{\overline{OS''_a}}{\overline{OA'}}$$

din care rezultă că $\overline{OS_a}=\overline{OS'_a}=\overline{OS''_a}$, deci în cazul problemii, punctele S'_a şi S''_a coincid cu S_a.

Aşadar, *dreptele* BB_a, CC_a *şi* OA' *se întâlnesc în acelaş punct aparţinând bisectoarei unghiului* BAC.

2°. Considerând punctelele analoage lui S_a, avem relaţiunile:

$$(4)\qquad \frac{\overline{OS_b}}{\overline{S_bB'}}=\frac{R}{h_b}\ \text{şi}\ \frac{\overline{OS_c}}{\overline{S_cC'}}=\frac{R}{h_c},$$

şi ţinând seamă de relaţiunile cunoscute într'un triunghiu oarecare

$$(5)\qquad 2S=a.h_a=b.h_b=c.h_c=2pr,$$

(a, b, c, p, S însemnând ca deobiceiu laturile semiperimetrul şi suprafaţa triunghiului), deducem că:

$$(6)\qquad \Sigma\frac{\overline{OS_a}}{\overline{S_aA'}}=R.\Sigma\frac{1}{h_a}=\frac{R}{S}.\Sigma\frac{a}{2}=\frac{R.p}{S}=\frac{R}{r}.$$

3°. In cazul când ducem prin A' paralele cu semidreptele OB şi OC, însemnând cu B'_a şi C'_a punctele de intersecţiune ale acestor paralele cu cercul A' de rază $\overline{A'A}$ iar pe dealtă parte însemnând cu T_a, T'_a, T''_a punctele unde dreptele $B_aB'_a$, $C_aC'_a$, AI'_a (bisectoarea exterioară a unghiului BAC) taie respectiv dreapta OA', avem aplicând proprietatea dreptei paralele cu o latură a unui triunghiu, relaţiunile:

$$(7)\qquad \frac{\overline{T_aO}}{\overline{T'_aA'}}=\frac{\overline{T'_aO}}{\overline{T'_aA'}}=\frac{\overline{T''_aO}}{\overline{T''_aA'}}=\frac{R}{h_a}$$

care conduc ca mai sus, la proprietatea că *dreptele* BB'_a, CC'_a, OA' *sunt concurente în acelaş punct* T_a *aparţinând bisectoarei exterioare a unghiului* BAC.

Avem deasemenea relaţiunea:

$$(8)\qquad \sum\frac{\overline{T_aO}}{\overline{T_aA'}}=\frac{R}{r}.$$

Observare. Punctele T_a, O, S_a, A' *formează o diviziune armonică, căci avem:*

$$(9)\qquad \frac{\overline{T_aO}}{\overline{T_aA'}}+\frac{\overline{S_aO}}{\overline{S_aA'}}=0.$$

(ţinând seamă de semnele segmentelor)

Au dat soluţiuni bune Dnii: *Vâlceanu Justin* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Pop Leontin* (Cl. VII, liceul Oradea).

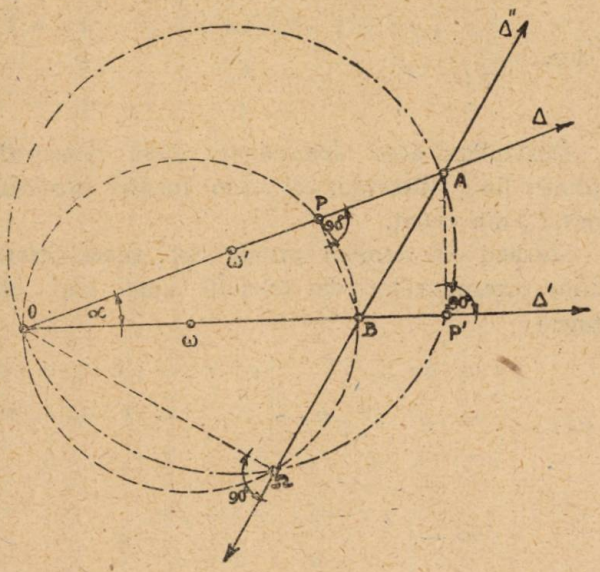
O. N. Ţ.

874. — *Dintr'un punct fix* O *se duc două drepte* Δ *şi* Δ' *care fac un unghiu* α. *Ele taie o dreaptă dată* Δ'' *în punctele* A *şi* B. *Punctul* P *fiind proiecţiunea lui* B *pe dreapta* Δ *şi* P' *a lui* A *pe* Δ', *să se afle locul punctelor* P *şi* P', *când dreptele* Δ *şi* Δ' *se rotesc în jurul lui* O.

D. Scarlat.

Fie Ω proiecţiunea punctului O pe dreapta fixă Δ'', şi *o* poziţiune oarecare a unghiului constant

AOB. In timpul unei rotaţiuni complecte fiecare din laturile unghiului AOB coincid odată cu



semidreapta $O\Omega$. In cazul când OA coincide cu semidreapta $O\Omega$, punctul P coincide cu Ω, iar când OB coincide cu semidreapta $O\Omega$, punctul P' coincide cu Ω; astfel că Ω este o poziţiune particulară atât a punctului P cât şi a punctului P'.

Observând în plus că patrulaterul $O\Omega PB$ este inscriptibil $\left(\widehat{O\Omega B} = \widehat{OPB} = \frac{\pi}{2}\right)$, deducem că $\widehat{P\Omega B} = \widehat{POB} = \alpha = C^{te}$, deci punctul P descrie o dreaptă trecând prin Ω şi făcând unghiul constant α cu dreaptă fixă Δ''.

Deasemenea, observând că pătrulaterul $O\Omega AP'$ este inscriptibil $\left(\widehat{O\Omega A} = \widehat{OP'A} = \frac{\pi}{2}\right)$, avem că $\widehat{P'\Omega A} = \widehat{P'OA} = \alpha = C^{te}$, deci locul punctului P' este o dreaptă trecând prin Ω şi făcând unghiul constant α cu *dreapta fixă* Δ''. Cele două drepte ΩP şi $\Omega P'$, locurile punctelor P şi P' respectiv, sunt simetrice în raport cu dreapta fixă Δ'',

Punctele dela infinit depe ΩP şi $\Omega P'$ corespund poziţiunilor când respectiv Δ sau Δ' vine paralelă cu Δ''.

Au dat soluţiuni geometrice elementare Dnii *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit. Bucureşti), *Grossu Mircea* (Liceul „Carol", Craiova). şi *Tutoveanu Valeriu* (Şc Polit., Bucureşti) Dl *Scarlat D.*, propunătorul problemei şi *Coşniţă Cezar*, au dat o soluţiune analitică.

O. N. Ţ.

905. — *La adunarea mai multor numere se omite o cifră dintr'o coloană şi se obţine rezultatul 2534972. La probă se adună acea cifră, dar se omite o alta, din altă coloană şi se obţine 2528872. Care este rezultatul exact al adunării ?*

ION PROTOPOPESCU

Privind cele două rezultate 2534972 şi 2528872 obţinute din adunarea unor aceloraşi numere şi ţinând seamă de enunt, putem conchide uşor că cifra omisă în prima adunare este dintr'o coloană mai la dreapta de cât coloana din care s'a omis o cifră când s'a efectuat a 2-a adunare, căci prima sumă e mai mare ca a doua.

Aşa fiind, cum ultimele două cifre sunt aceleaşi când s'au făcut cele două adunări, rezultă că cifra omisă în prima adunare este din coloana a 3-a şi anume este 9, căci cifra 8 din coloana a 3-a a numărului obţinut în a doua adnnare este bună.

Astfel rezultatul exact al adunării este:

$$2334972 + 900 = 2335872$$

Soluţii date de dnii: *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Dumitrescu Elena* (Lic., Giurgiu), *Ghilezan Aurel* (Şc. Polit., Timişoara), *Grinberg Meer* (Lic., Tighina), *Jeba Ctin* (Şc. Polit,, Timişoara), *Lupescu Gh. Ctin.*, *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marsieu T.* (Arad), *Mihăilescu N. N.* (Lic., Constanţa), *Moloc D. Mircea* (Lic., Oltenita), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Pupezescu Gh. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Rusa D. Ctin.* (Constanţa), *Stoicescu Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti) şi *Weissmann Mauriţiu* (Lic., Constanţa).

Soluţie algebrică. Fie x cifra omisă în prima adunare şi α coloana din care s'a omis; fie y cifra omisă în a 2-a adunare şi β coloana din care s'a omis.

Conform enunţului trebuie să avem:

$$2534972 + 10^{\alpha-1}x = 2528872 + 10^{\beta-1}y$$

$$6100 + 10^{\alpha-1}x = 10^{\beta-1}y$$

Simplificând cu 100, avem:

$$61 + 10^{\alpha-3}x = 10^{\beta-3}y$$

Ţinând seamă că x şi y sunt de câte o cifră, trebuie să luăm:

$$\alpha = 3, \quad \beta = 4,$$

şi avem:

$$61 + x = 10y,$$

ecuaţie care e verificată în numere întregi, luând

$$x = 9, \quad y = 7.$$

Rezultă că în prima adunare s'a omis cifra 9 din coloana a 3-a şi în a două adunare s'a omis cifra 7 din coloana 4-a.

Rezultatul exact este deci:

$$2534972 + 900 = 2528872 + 7000 = 2535872$$

909. — *Dacă,* $x + y + z = 0$, *expresia:*

$$E = \Sigma (x^3 + yz + 1)(z^2 - y^2),$$

este nulă.

CEZAR COSNITA

Efectuând calculele şi simplificând putem scri succesiv:

$$E = (z^2 - y^2)(x^2 + yz + 1) + (x^2 - z^2)(y^2 + zx + 1) + (y^2 - x^2)(z^2 + xy + 1) = yz^3 - y^3z + x^3z - xz^3 + xy^3 - x^3y = yz(z^2 - y^2) + xz(x^2 - z^2) + xy(y^2 - x^2) = yz(z + y)(z - y) + xz(x + z)(x - z) + xy(y + x)(y - x).$$

Din relaţia de condiţie deducem:

$$z + y = -x$$
$$x + z = -y$$
$$x + y = -z,$$

astfel că înlocuind în expresia lui E, avem:

$$E = xyz(y - z) + xyz(z - x) + xyz(x - y) = xyz(y - z + z - x + x - y) = 0,$$

tocmai ce era de dovedit.

Soluţii date de dnii: *Chivu S. Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Ciancilian Agop* (Balcic), *Crivăţ I Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Ghilezan A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghişoin I. P.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), *Jeba Ctin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lascu Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Lupescu Gh. Ctin* (Lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student), *Mihăilescu N. N.* (Lic. Constanţa), *Motoc D. Mircea* (Lic. Oltenita), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Parepeanu Ioan* (Lic. Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit, Timişoara), *Purdilă Anton* (Lic. Braşov), *Rusu D. Ctin* (Lic. Constanţa) şi *Velicescu G. Titu* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

Altă soluţie. Considerăm determinantul:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} x^2 + yz + 1 & y^2 + zx + 1 & z^2 + xy + 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dezvoltând acest determinant după elementele primei linii, observăm că avem tocmai expresiunea E, din enunţ.

Scăzând din terminii primii linii suma termenilor corespunzători din celelalte două linii, obţinem:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} yz & yz - zx & yz - xy \\ x^2 & x^2 - y^2 & x^2 - z^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} yz - zx & yz - xy \\ x^2 - y^2 & x^2 - z^2 \end{vmatrix} =$$

$$- (x - y)(x - z)\begin{vmatrix} z & y \\ x + y & x + z \end{vmatrix}$$

Cum din relaţia de condiţie:

$$x + y = -z$$
$$x + z = -y,$$

rezultă:

$$\Delta = E = 0.$$

Soluţia date de dnii: *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghilezan A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Oelse Emil* (Şc. Polit., Timişoara).

919. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească identitatea:*

$$\Sigma \sin^2 A - \frac{1}{4}\prod \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \frac{1}{3R}\sum \frac{a}{\sin A}$$

EMILIAN MEREUTA

Ţinând seamă că:

$$\Sigma \sin^2 A = 2 + \cos A \cos B \cos C,$$

(Culegere de Probleme de I. Ţ. I. C. pag. 394), şi încă de relaţia cunoscută:

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C,$$

primul membru al relației date devine:

$$(1) \qquad E = 2 + 2\cos A \cos B \cos C - 2\cos A \cos B \cos C = 2$$

Să calculăm acum și valoarea membrului al 2-lea al relației date, ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Avem astfel:

$$(2) \qquad \frac{1}{3R}\sum \frac{a}{\sin A} = \frac{1}{3R}(2R + 2R + 2R) = 1$$

Privind relațiile (1) și (2) resultă că identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Codreș I. Florian* (bacalaureat), *Crivăț I. Vladimir*, (bacalaureat, București), *Cuciureanu Ștefan* (Lic. Milit. Iași), *Derenbaum M.*, (bacalaureat, Tighina), *Haralamb P. Ionescu*, (Oltenița), *Marineanu Traian*, (student, București), *Mihăileanu N.*, (Lic. Constanța), *Negrea A. Mircea Leonte*, (student, București), *Parepeanu C. I.*, (Lic. Brașov), *Popa Gh. Ioan*, (Oltenița), *Pupezescu Gh. Ioan*, (Șc. Polit. Timișoara), *Purdile A.*, (Lic. Brașov), *Russu D. Ctin*, (Constanța), *Savin C. Ioan*, (Șc. Milit. de Artilerie), *Vasu Vasile Velicescu Gh. Titu*.

920. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu să se stabilească relația:*

$$\sum\left(\cos^2\frac{A}{2} + \frac{s^2 - r^2 r_a^2}{bc\, r_a^2} - \sin^2\frac{A}{2}\right) = 2$$

VLADIMIR I. CRIVAT

Insemnând cu E primul membru și ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = \cos A$$

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \qquad r = \frac{s}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

primul membru al relației date se poate scri succesiv:

$$E = \Sigma\cos A + \sum\frac{(p-a)^2}{bc} - \sum\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p.bc}$$

$$= \Sigma\cos A + \sum\frac{p-a}{p}\left[\frac{p(p-a)}{bc} - \frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right]$$

Ținând încă seamă și de relațiile cunoscute:

$$\frac{p(p-a)}{bc} = \cos^2\frac{A}{2}, \qquad \frac{(p-b)(p-c)}{bc} = \sin^2\frac{A}{2},$$

putem scri:

$$E = \Sigma\cos A + \sum\frac{p-a}{p}\left(\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= \Sigma\cos A + \Sigma\cos A\,\frac{p-a}{p} = \Sigma\cos A\,\frac{2p-a}{p}$$

$$= \Sigma\cos A\,\frac{b+c}{p} = \frac{1}{p}\Big(b\cos A + c\cos A +$$

$$c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C\Big) =$$

$$\frac{1}{p}\Big[(b\cos C + c\cos B) + (a\cos C + c\cos A) +$$

$$(a\cos B + b\cos A)\Big] = \frac{a+b+c}{p} = \frac{2p}{p} = 2$$

Relația dată este astfel stabilită.

Soluții date de dnii: *Cuciureanu Ștefan*, (Lic. Milit. Iași), *Marineanu Traian*, (student, București), *Popa Gh. Ioan*, (Lic. Oltenița), *Purdilă A.*, (Lic. Brașov) *și Velicescu Gh. Titu*, (Lic. Matei-Basarab, București).

PROBLEME PROPUSE

951. — Să se găsească un patrat perfect egal cu suma cuburilor a trei numere în progresie aritmetică.

COL. GH. BUICLIU

952. — Se cer patratele perfecte:

$$\overline{abcdde} = N^2 \text{ și } \overline{abfddg} = (N+1)^2,$$

în care cifrele e, f, g sunt patrate perfecte, iar c cub perfect.

VLADIMIR I. CRIVAT

953. — In triunghiul ABC se cere să se ducă o dreapta paralelă la latura BC, așa că dacă

P şi Q sunt punctele ei de intersecţie cu laturile AB şi AC să existe relaţia.

$$BC+PQ=BP+QC.$$

Dacă se duc în aceleaşi condiţiuni, paralele la laturile AC şi AB se obţin pe BA şi BC punctele U şi T., iar pe CA şi CB punctele R şi S. Să se arate că.

1°. Dreptele PS, QT şi RU sunt concurente.

2°. Cercurile de diametru BP şi QC şi analoagele lor sunt tangente.

3°. $PQ=TS$; $QR=TU$; $RS=PU$.

4°. Exagonul PQRSTU este circumsciptibil.

A. COMAN

954. — Pe perimetru unui paralelogram ABCD se alege un sens determinat şi se construesc pe laturile opuse perechi de triunghiuri — egale şi orientate în acelaş fel faţă cu sensul ales — şi anume:

(AMB şi CPD); (BNC şi DQA).

1°. Să se arate că în toate cazurile de figură posibile (ambele perechi către exteriorul paralelogramului, sau ambele către interiorul paralelogramului sau una către interiorul şi cealaltă către exteriorul paralelogramului), patrulaterul MNPQ este un paralelogram.

2°. O fiind punctul de întâlnire al diagonalelor paralelogramului ABCD, se construesc cercurile AOB, BOC, COD, DOA, iar în segmentele exterioare paralelogramului, ale acestor cercuri se înscriu triunghiurile isoscele AMB, BNC, CPD, DQA. Să se arate că paralelogramul MNPQ este un romb.

3°. Să se arate că în afară de perechile de triunghiuri isoscele, considerate mai sus, există o infinitate de grupe de perechi de triunghiuri egale (AMB CPD) şi (BNC, DQA) oarecare, pentru care paralogramul MNPQ este un romb.

4°. Să se construiască două perechi de triunghiuri egale (AMD, CPD) şi (BNC, DQA) astfel ca paralelogramul MNPQ să fie un dreptunghiu.

Asemenea să se construiască două perechi de triunghiuri egale (AMB, CPD) şi (BNC, DQA), astfel ca paralelogramul MNPQ să fie un patrat.

OVIDIU TINO

955. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x^2+y^2+z^2-2xyz=5 \\ x^2y+x^2z+xy^2+zy^2+xz^2+yz^2+3xyz=98 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

956. — Să se determine n astfel ca limita expresiei:

$$E=\frac{x-\sin x}{(1-\cos x)^n},$$

pentru $n=0$, să fie finită şi diferită de zero şi să se calculeze această limită.

SUB.-LT. A. I. STAN

957. — Se dau relaţiile:

$$u=x+2y+z$$

$$v=2x+y+3z$$

$$w=3(x^2-y^2)+2(4z^2+5xz+yz)$$

Să se dovedească că putem elimina pe x, y, z între aceste relaţii şi să se găsească relaţia între u, v, w, obţinută prin eliminarea lui x, y, z.

V. ALACI

958. — Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu ABC, are loc una din relaţiile clasice:

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$$

$$\overline{AC}^2=\overline{BC}\cdot\overline{DC}$$

$$\overline{AD}^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$$

D fiind piciorul înălţimii coborîte din A pe $\overline{BC}$, triunghiul este dreptunghiu.

A. HOLLINGER

959. Să se stabilească identitatea:

$$b(a-c)\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}+\frac{cp(r_a-r)}{r_a}=\frac{bc(h_a+h_b+h_c)}{h_a}$$

EMILIAN MEREUTA

CANDIDAȚII REUȘIȚI LA EXAMENUL DE ADMITERE IN ANUL PREPERATOR

(13— 17 OCTOMVRIE 1930.)

1. *Pop Leontin.* (Liceul Oradea).
2. *Meszaros Francisc.* (Școala Cond. Tech. Cluj.)
3. *Rațiu I. Emil.* (Liceul Oradea.)
4. *Pisai I. Gheorghe.* (Liceul Focșani).
5. *Nadolschi I. Victor.* Liceul Chișinău).
6. *Rusu D. Ionel.* (Liceul Constanța).
7. *Arion Virgil.* (Liceul Brăila).
8. *Sădeanu C. Paul.* (Liceul Constanța).
9. *Gebefugi Ștefan.* (Școala Cond. Tech. Cluj).
10. *Tolpeghiu Alex.*, (Liceul Bălți)
11. *Boarnă Petru.* (Școala Cond. Tech. Cluj)
12. *Fuchs Anatolie.* (Liceul Chișinău).
13. *Petcu Elipidifor.* (Liceul Chișinău.)
14. *Popovschi Visarion*, (Liceul Bolgrad).
15. *Subovici Vadim.* (Liceul Bălți)
16. *Tat Emil.* (Liceul Turda).
17. *Grigoriu Cristea.* (Liceul Bacău).
18. *Plasiciuc P. Vasile.* (Liceul Chișinău).
19. *Agarici Constantin.* (Liceul Roman).
20. *Popescu I. Alex.* (Liceul Timișoara).
21. *Pop E. Iuliu.* (Școala Cond. Tech. Cluj).
22. *Ariciuc Gheorghe.* (Liceul Iași).
23. *Cioban Constantin.* (Liceul Soroca).
24. *Ghiura Coriolan.* (Liceul Oradea).
25. *Uzun Leonid*, (Liceul Cetatea-Albă).
26. *Zară Florea.* (Liceul Craiova).
27. *Boeriu Valeriu*, (Liceul Brașov).
28. *Chitta I. S. Ștefan.* (Liceul Cluj).
29. *Christolopol C. I.* (Liceul Brăila)
30. *Frangopol Cl. Nicolae.* (Liceul Constanța).
31. *Plopeanu Vasile.* (Liceul Brăila).
32. *Rudenco Teodor.* (Liceul Cetatea-Albă)
33. *Sadagorschi Grigorie.* (Șc. Cond. Tech. Cernăuți).
34. *Chivulescu Constantin.* (Școala Cond. Tech. Cluj).
35. *Pop D. Ioan.* (Liceul Blaj).
36. *Teabur Valentin.* (Liceul Chișinău).
37. *Brătucu Ioan* (Liceul Constanța).
38. *Gradin Mircea*, (Școala Cond. Arhitecți Cernăuți).
39. *Iakabos Gr. Andrei.* (Liceul Dej).
40. *Manea S. Ioan.* (Liceul Roman).
41. *Milcoveanu Dan*, (Liceul Craiova).
42. *Agarici Horea.* (Liceul Brașov).
43. *Buhnier Dumitru.* (Liceul Bolgrad).
44. *Kuschniriuk Francisc.* (Liceul Real II Cernăuți.)
45. *Lațcu Petru.* (Liceul Timișoara).
46. *Cercel Gheorghe*, (Liceul Sf. Sava București).
47. *Divo Ioan*, (Școala Cond. Tech. Cluj).
48. *Berzanescu Andrei*, (Șc. Sup. de Com. Timișoara).
49. *Egri Iosif.* (Liceul Baia-Mare).
50. *Handler Gheorghe.* (Liceul Caransebeș.)
51. *Lighezan Valer.* (Liceul Timișoara).
52. *Marian Ioan* (Liceul Oradea).
53. *Matuschek I R.* (Liceul Arad).
54. *Burbea Radu.* (Liceul Galați).
55. *Copaciov Constantin.* (Școala Cond. Tech. Cluj).
56. *Gruionu Ilie.* (Liceul Timișoara).
57. *Leatris Constantin.* (Liceul Iași).
58. *Mârza Vasile.* (Liceul Iași).
59. *Gheorghe Clement.* (Școala Cond. Tech. Cluj).
60. *Marinov Alexandru.* (Liceul Chișinău).
61. *Purcel Atanasie.* (Liceul Chișinău).
62. *Pascu P. Zeno.* (Șc. Sup. de Comerț Timișoara).
63. *Grossu Gheorghe.* (Liceul Chișinău).
64. *Herescu Gh. Nicolae.* (Liceul Iași).
65. *Iaklovschi D. Eugen.* (Liceul Odorhei).
66. *Pop E. Lucian.* (Liceul Tulcea).
67. *Scalozub F. Gr. P.* (Liceul Chișinău).
68. *Burstein Iosif.* (Liceul Chișinău)
69. *Ozeranscki V. Pavel.* (Liceul Chișinău).
70. *Toculescu I. Ar.* (Liceul Craiova).
71. *Banu P. Aurel.* (Liceul Brăila).
72. *Balogh Ioan.* (Liceul Cluj).
73. *Bran Vasile.* (Liceul Timișoara).
74. *Criticos Anast.* (Liceul Constanța).
75. *Făcăoaru Aurel.* (Liceul Cluj).
76. *Grigoriev F. Alex.* (Liceul Bălți).
77. *Jumanca Zeno.* (Liceul Caransebeș).
78. *Dobrescu P. Ioan.* (Liceul Craiova).
79. *Florea Gh. Valeriu.* (Liceul Real II Cernăuți).
80. *Ivanovski V. Boris.* (Liceul Tighina).

Abonamentul pe anul X-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

REVISTA MATEMATICĂ
din
TIMIŞOARA

ANUL X. 15 DECEMVRIE 1930 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. VIRGIL CLAUDIAN CATEVA PROBLEME DE CALCUL DIFERENTIAL
2. NOTE MATEMATICE: 22, 23, 24
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 652. 655, 662, 906, 911. 926
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând cu acest număr mai fac parte din Comitetul Revistei Matematice și Dnii profesori, conferențiari și asistenți de la Școala Politechnică din Timișoara.

1. **Andronescu P.** Doctor Inginer, Profesor de Electrotechnică.
2. **Bakony Coloman,** Inginer, Profesor de Technologie.
3. **Laţiu Victor.** Doctor în Științele Naturale, Profesor de Mineralogie și Petrografie.
4. **Mateescu Ștefan,** Doctor in Științele Naturale, Profesor de Geologie și Paleontologie.
5. **Popescu Ilie,** Inginer, Profesor de Mașini Miniere și Conferențiar de Prepararea Minereurilor.
6. **Anastasiade Ion,** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării.
7. **Lobonț Emil,** Doctor in Științele Naturale, Profesor de Geologia Zăcămintelor.
8. **Lambrino Gh,** Doctor in Drept și Economie Politică, Conferențiar de Economie Politică și Legislație Industrială.
9. **Schileru Ion,** Inginer, Conferențiar de Electrotechnică și Aplicațiile Electricității în Mine.
10. **Stoicescu Lazăr,** Inginer, Conferențiar la Elemente de Mașini și Cursul General de Mașini
11. **Zăgănescu Ion,** Inginer, Conferențiar de Calculul Grafic și Vectorial.
12. **Ardeleanu Ștefan,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mașini Termice.
13. **Bărglazan Aurel,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
14. **Bobârnac Mircea,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mașini Termice.
15. **Catona Victor,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice.
16. **Câlniceanu C-tin,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Organe de Mașini.
17. **Contrea Aurel,** Doctor în Științele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie și Petrografie.
18. **Cserveny Iuliu,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice.
19. **Cristodulo N,** Licențiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
20. **Gane Vasile,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Fizică Generală.
21. **Iorgulescu T.,** Licențiat în Științe, Asistent pe lângă catedra de Geologie.
22. **Marinescu Ion,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Exploatări Miniere.
23. **Miloia Ioachim,** Doctor în Litere și Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă.
24. **Nadașan Ștefan,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistența Materialelor.
25. **Săuciuc Leon,** Licențiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
26. **Sandor Adalbert** Inginer, Dr. în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică și Fizică Industrială.
27. **Smigelschi O.,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
28. **Stambuleanu A.,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică și Fizică Industrială.
29. **Stantzel Edmond,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Construcții.
30. **Stefănescu O.,** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Mașini Miniere și Topografie.
31. **Coca Alexandru,** Licențiat în Litere, Lector de limba Engleză.
32. **Ferenc Anton,** Diplomat de Educație Fizică, Conducător de Educație Fizică.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu,** Școala Politechnică din Timișaaro.

ANUL X — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMVRIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

CATEVA PROBLEME DE CALCUL DIFERENȚIAL[1].

de VIRGIL CLAUDIAN

In rândurile de mai jos, voi stabili câteva exerciții interesante de Analiză, cari pot fi apoi studiate direct și formând prin aceasta exerciții la capitolele calculului diferențial.

1. Să considerăm funcția de două variabile:

$$z = f(x, y);$$

am:

$$(1) \qquad dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Consider acuma pe x ca funcțiune de y, z. Prin urmare am:

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x$$

Dacă diferențiez din nou pe (2) am:

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dy\right) dx^2 + 2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dy\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} dx + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy\right) dy^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\right) d^2 x + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx\, d^2 x + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d^2 x\, dy + \frac{\partial f}{\partial x} d^3 x = 0;$$

dacă efectuez toate calculele aici, voi putea scrie următoarea formulă desvoltată:

$$(3) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx\, d^2 x + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy\, d^2 x + \frac{\partial f}{\partial x} d^3 x = 0.$$

Să punem acum pentru prescurtarea formulelor:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \frac{\partial f}{\partial y} = q, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$$

$$p_1 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad q_1 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, r_1 = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, s_1 = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Aceste notații sunt necesare în cele ce urmează, pentru ușurarea calculului.

Formulele (1), (2) și (3) devin atunci:

$$(1') \qquad dz = p\, dx + q\, dy,$$

$$(2') \qquad 0 = r\, dx^2 + 2 s\, dx\, dy + t\, dy^2 + p\, d^2 x,$$

$$(3') \qquad p_1 dx^3 + 3 q_1 dx^2 dy + 3 r_1 dx\, dy^2 + s_1 dy^3 + 3 r\, dx\, d^2 x + 3 s\, dy\, d^2 x + p\, d^3 x = 0.$$

Din aceste formule deducem următoarele valori:

$$(4) \qquad dx = \frac{dz - q\, dy}{p},$$

$$(5) \quad d^2 x = \frac{-r dz^2 + 2(qr - ps) dy\, dz + (2pqs - q^2 r - p^2 t) dy^2}{p^3}$$

$$(6) \quad d^3 x = -\frac{A\, dy^3 + 3B\, dy^2 dz + 3C\, dy\, dz^2 + D\, dz^2}{p^5},$$

unde:

$$A = 3p^2 q(q q_1 - p r_1) - p p_1 q^3 + s_1 p^4 + 3(p s - q r)(2 p q s - q^2 r - p^2 t),$$

$$B = 6 p q r s - 3 q^2 r^2 - 2 p^2 s^2 - p^2 r t + p^3 r_1 - 2 p^2 q q_1 + p q^2 p_1,$$

[1]) Comunicare făcută la „*Cercul Revistei Universitare Matematice*“ în anul 1929.

$$C = 3qr^2 - 3prs + p^2 q_1 - pqp_1,$$

$$D = pp_1 - 3r^2.$$

Ne vom pune acum câteva probleme asupra expresiei (6) care ne dă pe d^3x. Avem din (6):

$$(7)\quad \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = -\frac{A}{p^5}, \frac{\partial^3 x}{\partial y^2 \partial z} = -\frac{B}{p^5}, \frac{\partial^3 x}{\partial y \partial z^2} = -\frac{C}{p^5}, \quad \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} = -\frac{D}{p^5}.$$

Să presupunem că voim să determinăm toate funcțiunile $f(x, y)$, care satisfac la relația $D = 0$. Atunci avem:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial z^3} = 0;$$

de unde integrând rezultă:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = f(y).$$

Integrând încă de două ori reese:

$$x = z^2 f(y) + z\varphi(y) + \theta(y)$$

Prin urmare putem rezolva direct, prin calcul, următoarea problemă:

Problema I. *Funcțiunea implicită* $z = F(x, y)$ *definită de relațiunea*

$$x = z^2 f(y) + z\varphi(y) + \theta(y),$$

satisface la ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 = 0.$$

Căutând funcțiunile care verifică ecuațiunea $C = 0$, adică

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y \partial z^2} = 0,$$

conchidem.

Problema II. *Funcțiunea implicită* $z = F(x, y)$ *definită de relațiunea*

$$x = f(z) + z\varphi(y) + \theta(y),$$

satisface la ecuația cu derivate parțiale:

$$3\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - 3\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0.$$

Dacă acuma căutăm funcțiunile care verifică ecuațiunea $B = 0$, adică:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^2 \partial z} = 0$$

pe care integrând-o deducem încă.

Problema III. *Funcțiunea implicită* $z = F(x, y)$ *definită de relațiunea*

$$x = f(y) + y\varphi(z) + \theta(z),$$

satisface la ecuația cu derivate parțiale:

$$6\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0.$$

In sfârșit, dacă considerăm ultima ecuațiune $A = 0$, adică:

$$\frac{\partial^3 x}{\partial y^3} = 0,$$

ea ne va conduce la:

Problema IV. *Funcțiunea implicită* $z = F(x, y)$, *definită de relațiunea*

$$x = y^2 f(z) + y\varphi(z) + \theta(z)$$

satisface la ecuația cu derivate parțiale:

$$3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^4 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 3\left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left[2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] = 0.$$

2. Să considerăm acum o funcțiune de 3 variabile.

$$(8)\quad u = f(x, y, z);\ \text{avem};$$

$$(9)\quad du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Să presupunem acum că, în loc de u, considerăm pe z ca funcțiune de x, y, u definită de (8). Dacă diferențiem din nou ecuația (9) avem:

$$0=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz\right)dz+$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz\right)dy+$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz\right)dz+\frac{\partial f}{\partial z}d^2z.$$

In expresia precedentă efectuez toate calculele, ordonez, și scriind desvoltat am formula următoare:

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz+$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}dzdx+\frac{\partial f}{\partial z}\partial^2 z=0.$$

Voesc să calculez expresia lui d^2z. Pentru asta din formula (9) deduc:

$$(11)\qquad dz=\frac{du-\frac{\partial f}{\partial x}dx-\frac{\partial f}{\partial y}dy}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

și introducând această expresie în formula (10), efectuând calculele și reducerile, am:

$$(11')\qquad -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3 d^2z=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\right.$$

$$\left.2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]dx^2$$

$$+2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}-\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right]dxdy$$

$$+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}du^2$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial y}\right)du\,dy+$$

$$2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)du\,dx.$$

Dacă ne propunem acum să găsim toate funcțiile care anulează coeficientul lui $dxdy$ din expresia precedentă, înseamnă că trebue să avem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

de unde prin integrare:

$$z=f(x,u)+\varphi(y,u)$$

Reese atunci:

Problema V. *Funcțiunea implicită* $u=F(x,y,z)$ *definită de relațiunea:*

$$z=f(x,u)+\varphi(y,u),$$

satisface la ecuația cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2-\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}-$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0.$$

Relativ la această problemă și la formula (5) voi face la fine o observație.

Să considerăm acum diferențiala de ordinul 3, d^3z. Printr'un calcul analog cu cele precedente, vom găsi expresia:

$$(12)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial x}dz\right)^{(3)}+$$

$$3\,d^2z\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}dx\right)+$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}d^3z=0.$$

Dacă ținem seamă de expresiile (11) și (11') ale lui dz și d^2z și le introducem în expresia (12) desvoltată, vom găsi pe d^3z. O problemă interesantă se pune, dacă cercetăm funcțiile care anulează coeficientul lui $dxdydu$. Dacă se caută acest coeficient și se fac apoi toate calculele, rezultă atunci:

Problema VI. *Funcțiunea implicită* $u=F(x,y,z)$ *definită de relațiunea:*

$$z = \lambda(x,u) + \mu(y,u) + \varphi(x,y),$$

satisface la ecuația cu derivate parțiale:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial z} +$$

$$3\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2} +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right) +$$

$$3\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)^2.$$

Poate că ar fi interesant de văzut, care e ecuația cu derivate parțiale, pe care o verifică funcția implicită $v = F(x,y,z,u)$, definită de relațiunea:

$$u = f(x,y,v) + \varphi(y,z,v) + \psi(z,x,v) + \theta(x,y,z).$$

Observarea I. Am putea deduce pe d^2x, d^3x dela ambele paragrafe, evident și pe altă cale. Din ecuația (1) deducem:

$$dx = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}dz - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}dy.$$

Din această formulă deducem pe d^2x:

$$d^2x = \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)dz + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)dy\right]dz -$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)dz + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)dy\right]dy =$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)dy^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right) -\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)\right]dy\,dz + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)dz^2$$

Expresia aceasta ne conduce apoi la calculul lui d^3x; calculul acesta nu e mai simplu ca cel întrebuințat mai înainte. Singurul lucru care se observă, este că expresiile date în problemele dela paragraful 1, se pun prin procedeul precedent de calcul, sub forma condensată, a unor ecuații cu derivate parțiale de ordin mai mic cu o unitate.

Observarea II. Din expresia (11) direct, putem deduce pe d^2z și anume iată cum. Scriem:

$$(11'') \qquad dz = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}du - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dx - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}dy.$$

De aci, printr'o nouă diferențiere avem:

$$d^2z = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)du + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)dy\right]du$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)du + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)dy\right]dx$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)du + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right)dy\right]dy.$$

Așa că, se vede imediat, coeficientul lui $dx\,dy$ din expresiunea (11') și din problema V, are următoarea formă condensată:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right),$$

făcând abstracție de niște factori neimportanți. Din expresia lui d^2z, deducem evident pe d^3z.

Observarea III. Exerciții interesante de calcul diferențial se mai pot deduce din integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordinul I nelineare; se caută, după cum se știe, o integrală completă $V(x,y,z,\alpha,\beta) = 0$ și apoi integrala generală se obține luând înfășuratoarea unei familii $\beta = \varphi(\alpha)$ de integrale complete. Dar asupra unor asemenea chestiuni voi reveni cu altă ocazie.

NOTE MATEMATICE

22. — *Asupra problemei 888.* Imi propun să generalizez această problemă.

Fie de calculat suma:

$$S = a_1 a_2 + a_2 a_1 a_3 + a_3 a_1 a_1 a_4 + \ldots + a_n a_1 a_1 \ldots a_1 a_m$$

unde:

$$a_2 = a_1 + 1\,;\ a_3 = a_1 + 2, \ldots a_n = a_1 + (n-1)\,;\ a_m = a_{n+1} = a_1 + n$$

Soluție.

Suma S se mai poate scrie astfel:

$$S = (10\,a_1 + a_2) + (10^2 a_2 + 10\,a_1 + a_3) + (10^3 a_3 + 10^2 a_1 + 10\,a_1 + a_4) + \ldots + (10^n a_n + 10^{n-1} a_1 + \ldots + 10\,a_1 + a_{n+1}) = (10\,a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + \ldots + 10^n a_n) + (a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n+1}) + [(n-1).10 + (n-2).10^2 + (n-3).10^3 + \ldots + [n-(n-1)].10^{n-1}]$$

Inlocuind pe a_2, a_3 a_4 etc., avem:

$$S = 10\,a_1 + 10^2 (a_1 + 1) + 10^3 (a_1 + 2) + \ldots + 10^n [a_1 + (n-1)] + [(a_1 + 1) + (a_1 + 2) + \ldots + (a_1 + n)] + n(10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) - 10[1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (n-1).10^{n-2}] = a_1 (10 + 10^2 + \ldots + 10^n) + 10^2 [1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (n-1).10^{n-2}] + n\,a_1 + (1 + 2 + \ldots + n) + n(10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) - 10[1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (n-1).10^{n-2}]$$

Pentru suma:

$$1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (n-1).10^{n-2}$$

cunoștem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + p.x^{p-1} = \frac{(p+1)x^p (x-1) - x^{p+1} + 1}{(x-1)^2}$$

unde făcând $x = 10$ și $p = n-1$, găsim:

$$1 + 2.10 + 3.10^2 + \ldots + (n-1).10^{n-2} = \frac{n.10^{n-1}\cdot(10-1) - 10^n + 1}{(10-1)^2}$$

Inlocuind această sumă în S și însumând direct sumele din paranteze avem:

$$S_1 = a_1 \frac{10^{n+1} - 10}{10-1} + 10^2 . \frac{n.10^{n-1}(10-1) - 10^n + 1}{(10-1)^2} + n.a_1 + \frac{n(n+1)}{2} + n.\frac{10^n - 10}{10-1} - 10\,\frac{n.10^{n-1}(10-1) - 10^n + 1}{(10-1)^2}$$

sau:

$$S = a_1 \left[\frac{10^{n+1} - 10 + 9n}{9}\right] + 9 . 10 \frac{n.10^{n-1}(10-1) - 10^n + 1}{(10-1)^2} + \frac{n(n+1)}{2} + n.\frac{10^n - 10}{10-1}$$

sau încă:

$$S = a_1 \left[\frac{10^{n+1} - 10 + 9n}{9}\right] + \frac{9n.10^n - 10^{n+1} + 10}{9} + \frac{n(n+1)}{2} + n.\frac{10^n - 10}{9}$$

sau în sfârșit:

$$S = a_1 \left[\frac{10^{n+1} - 10 + 9n}{9}\right] + \frac{10n.10^n - 10^{n+1} + 10(1-n)}{9} + \frac{n(n+1)}{2}$$

Aci făcând $a_1 = 1$, avem chiar soluția problemei 888.

TRAIAN MARINEANU

---

23. — *O nouă soluție a problemei 869.* Voi da o soluție diferită de cea dată, la pag. 103 din acest an, punctului 1° al problemei 869. Cititori sunt rugați a urmări figura de la pag. 104.

Fie S_a intersecția lui OA' cu BB_a. Triunghiurile BOS_a, $A'B_aS_a$ sunt asemeni având unghiurile din S_a egale ca opuse la creștet, iar unghiurile din B și B_a egale ca alterne interne. Deci:

$$\frac{\overline{OS_a}}{\overline{S_aA'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{B_aS_a}} = \frac{R}{h_a} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AA'}}$$

Egalitatea între primul și ultimul raport arată că AS_a este bisectoarea unghiului OAA' în triunghiul OAA'.

La fel se arată că CC_a trece prin piciorul bisectoarei unghiului OAA' în triunghiul OAA'.

Dar se știe că într'un triunghiu ABC bisectoarea unghiului A este și bisectoarea unghiului OAA'. Aceasta se pote de altfel demonstra foarte simplu, observând că:

$$\sphericalangle OI_aA = \sphericalangle I_aAA'$$

ca alterne interne iar:

$$\sphericalangle OI_aA = \sphericalangle OAI_a$$

din triunghiul isoscel AOI_a. Deci:

$$\sphericalangle OAI_a = \sphericalangle I_aAA'$$

COL. GH. BUICLIU

---

24. — *Asupra triunghiurilor în care avem:* $a = h_a$.

In această notă, voi stabili câteva relații între elementele unui triunghiu în care o înălțime este egală cu latura corespunzătoare.

Pentru ca să stabilim aceste relații ne vom folosi de alte relații cunoscute.

Fie relația:

$$2S = a\,h_a$$

$$\therefore \qquad S = \frac{a^2}{2} \qquad \text{sau} \qquad S = \frac{h_a^2}{2}$$

din care scoatem:

$$(1) \qquad r = \frac{a^2}{2p} \qquad \text{sau} \qquad r = \frac{h_a^2}{2p}$$

Din relația:

$$(2) \qquad bc = 2R\,h_a \qquad \therefore \qquad R = \frac{bc}{2h_a}$$

scoatem:

$$bc = 2R\,a \qquad \therefore \qquad R = \frac{bc}{2a}$$

Inlocuind în relația:

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right)$$

pe r cu valoarile din (1) și (2) obținem:

$$\frac{pbc}{a^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{2pr_a}{a^2} - 1\right)\left(\frac{2pr_b}{a^2} - 1\right)\left(\frac{2pr_c}{a^2} - 1\right)$$

sau:

$$\frac{pbc}{h_a^3} = \frac{1}{4}\left(\frac{2pr_a}{h_a^2} - 1\right)\left(\frac{2pr_b}{h_a^2} - 1\right)\left(\frac{2pr_c}{h_a^2} - 1\right)$$

Din relația:

$$\sin A = \frac{a}{2R} \qquad \therefore \qquad a = 2R\sin A$$

avem:

$$(3) \qquad \sin A = \frac{h_a}{2R} \qquad \therefore \qquad h_a = 2R\sin A$$

$$\therefore \qquad S = 2R^2\sin^2 A.$$

In relația:

$$h_a = \frac{a\sin B\sin c}{\sin A}$$

înlocuind: $a = h_a$, obținem:

$$(4) \quad \frac{\sin B\sin C}{\sin A} = 1 \qquad \therefore \quad \sin A = \sin B\sin C$$

Ținând seamă de (3), relația (4) devine:

$$\sin B\sin C = \frac{a}{2R} \quad \text{și} \quad \sin B\sin C = \frac{h_a}{2R}$$

$$\therefore \qquad a = h_a = 2R\sin B\sin C$$

$$\therefore \qquad S = 2R^2\sin^2 B\sin^2 C$$

La fel se pot stabili și alte relații pentru un caz mai general.

IOAN GH. POPA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, No. 3, Noemvrie 1930.

Sur une affinité complexe et sur quelques propriétés du triangle, par *V. Thébault*. Asupra numărului indica-

torilor unui număr dat, de *T. Popoviciu*. Concursul „Gazetei Matematica" de *Al. Bunescu, Col. Gh. L. Liteanu* şi *G. A. Nichifor*, delegaţii Societăţii

2. *Maurice D'Ocagnes. Hommes. Choses de Science. Propos familiers.* Paris, Librairie Vuibert 1930. Acest volum de 306 pagini cuprinde o serie de articole şi conferinţe foarte interesante ţinute de autor în diferite ocaziuni asupra următoarelor subiecte: L'histoire de sciences, vue en raccourci par *Emile Picard*. Grands mathématiciens français. Calculateurs et mathématiciens. Les machines à calculer, de *Blaise Pascal. Francois Viète. Pierre Fermat. Pascal. Le chevalier de Borda. Louis Lagrange. Pierre-Simon Laplacc. Gaspard Monge. Les deux grands Carnot. Augustin Cauchy. Jean-Victor Poncelet. Michel Chasles. Evariste Galois. Napoléon*, géometre. *Le Marechal Foch* à l'Academie de sciences. Les fondateurs de la balistique. Femme de science. *Auguste Choisy*. L'art des ponts en pierre rénouvelé de nos jours par *Paul Séjourné*. L'oeuvre scientifique et technique *d'Albert Caquot*. Un chef-d'oeuvre de l'art de l'ingénieur. Les chemins de fer souterrains de Paris. Les marées. *Jules Verne.*

Recomandăm călduros acest important volum, corespondenţilor noştri.

3. N. Abramescu. *Lecţiuni de Trigonometrie Plană, pentru cl. VI.* (Editura Socec, Bucureşti). Această lucrare este o importantă carte didactică scrisă cu priceperea, talentul şi dragostea de şcoală de un distins şi cunoscut profesor, dl. *N. Abramescu.*

4. *N. Abramescu. Lecţiuni de Geometrie pură şi infinitizemală.* (Editura Universităţii din Cluj). Această carte, însoţită de o prefaţă a marelui profesor dl. *Maurice D'Ocagne*, cuprinde rezumatul lecţiunilor de Geometrie plană şi infinitizemală, profesate de autor la Universitatea din Cluj. Ea este o foarte valoroasă şi folositoare lucrare didactică pentru învăţământul universitar şi technic superior.

INFORMAŢIUNI

1. Autorul problemei propuse No. 946, este dl *Emil Mereuţă*, iar acel al problemei No. 947 este dl. *Ioan Curchi.*

2. Referitor la dorinţa exprimată printr'o scrisoare iscălită „Un grup de corespondenţi" rugăm a ni se trimete o adresă pentru a răspunde mai detailat celor ce ne-au scris.

PROBLEME REZOLVATE

652. — *Să se arate că în orice triunghiu, avem relaţia:*

$$\sum \frac{3(a^2-b^2)-ac}{ac} + 3\sum \sin B \cot A = 12 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

notaţiile fiind cele obicnuite.

V. ALACI

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A, \qquad \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

primul membrul pe care să-l notăm cu E, se poate scri succesiv:

$$E = \sum\left[\frac{3(a^2-b^2)}{ac} - 1\right] + 3\sum\frac{b}{a}\cos A =$$

$$3\sum\left(\frac{a^2-b^2}{ac} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2ac}\right) - 3$$

$$= 3\sum\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - 3 = 3\sum\cos B - 3$$

sau:

$$E = 3\sum\cos A - 3$$

Cum este încă cunoscută relaţiunea:

$$\sum\cos A = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(Culegere de Probleme, Cap. XVII, 2), resultă:

$$E = 12\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Relaţia dată este astfel stabilită:

Soluţii date de dnii: *Gheorghiu Th. Gheorghe* (Galaţi), *Ghişoiu I. Petru* (Şc. Polit., Bucureşti), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti) şi *Vasiliu Gh. Gh.* (Leoben).

655. — *Să dă un triunghiu* A B C, *se duce cercul înscris cu centrul în* I, *cercul cirsumscris* O *şi centrele* I_a, I_b, I_c *ale cercurilor exinscrise. Să se demonstreze că:*

1°. *Patrulaterul* B I C I_a *este înscriptibil;* 2°. *Patrulaterul* I_b C B I_c *este înscriptibil;* 3°. *Cercul* O *taie dreptele* I_cI, I_bI, şi I_aI *în două părţi egale.*

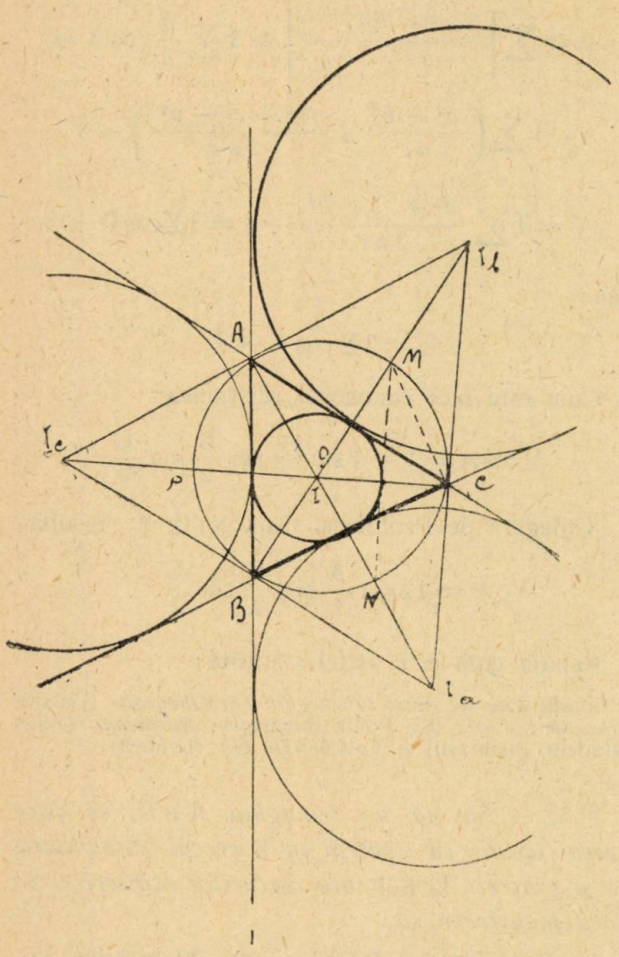
STEFAN ST. STEBLEA

Triunghiul $I_a I_b I_c$ este format de bisectoarele exterioare ale triunghiului A B C, ele sunt deci perpendiculare pe cele interioare.

1°. Observăm că, $\sphericalangle IBI_a = \sphericalangle ICI_a = 90°$, deci patrulaterul B I C I_a este înscriptibil. Analog şi patrulaterile C I A I_b, A I B I_c sunt înscriptibile.

2°. Triunghiul I_b B I_c fiind dreptunghic în B este înscris în cercul cu diametrul $I_b I_c$; triunghiul I_b C I_c fiind dreptunghiu în C este înscris în cercul descris cu diametrul $I_b I_c$. Patrulaterul I_b C B I_c rezultă astfel că este înscriptibil. Analog patrulalaterile I_c A C I_a şi I_b A B I_a sunt înscriptibile.

3°. Bisectoarele triunghiului A B C sunt înălțimele triunghiului $I_a I_b I_c$, deci I este ortocentrul

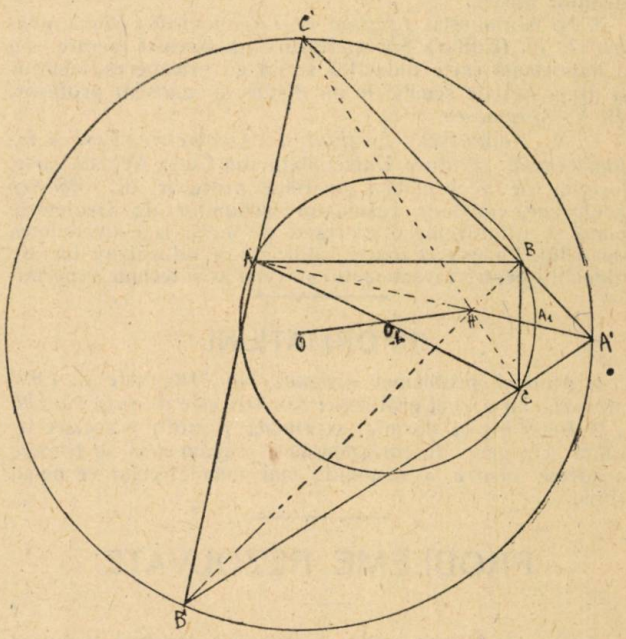


acestui triunghiu. Cercul circumscris triunghiului A B C este cercul lui *Euler* al triunghiului $I_a I_b I_c$ și se știe că acest cerc împarte în părți egale segmentele $I_c I$, $I_b I$, $I_a I$.

Soluții date de dnii: *N. Ermil* (Lic., Piatra-Neamț), *Aldea Nicolae* (Lic. Mrea Dealu), *Arsene Alexandru* (Lic. Milit., Iași), *Balaban I. Gh.* (Lic., Bârlad), *Boiangiu Simon*, *Cismaru Ion* (T.-Severin), *Coșnița Cezar* (Lic., Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Lic. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (Lic., Focșani), *Diaconescu Aurel* (Lic. Milit., Craiova), *Dimitriu At. Ioan* (Lic., Galați), *Dinu S. D-tru* (Șc. de Conductori, Chișinău), *Dobromirescu P.* (Caracal), *Gheorghe Mihai* (Lic. Milit., Craiova), *Gheorghiev Nicolae* (Bolgrad), *Gheorghiu Alexandru* (Lic., Piatra-Neamț), *Ghișoiu I. Petre* (Lic. Spiru-Haret, București), *Hohoi Vasile*, *Ignat I. Paul* (Lic. Milit., Iași), *Ionescu C. C-tin* (Lic. Milit., Iași), *Ionescu Țiu D. C-tin* (Lic. Milit., Craiova), *Kielburger Mihail*, *Mărăsescu Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Morțun A. C-tin* (Semin. Pedag., Iași), *Murăroiu I.* (Lic., Brașov), *Novac Aurel* (Lic., Cluj), *Novac Valeriu* (Arad), *Panait N. Teodor* (Lic. Milit., Iași), *Panaitescu Ion* (Lic. Milit., Craiova), *Pantu Z. Ion* (Lic. Lazăr, București), *Pârvulescu Ștefan* (Lic. Milit., Craiova), *Podariu Al.* (Piatra-Neamț), *Popescu O. Adrian* (Lic. Milit., Craiova), *Popovici M.* (Focșani), *Râmniceanu I. Cristian* (Lic. Mil., Iași), *Roman Ioan* (Lic. Mihai-Viteazul, București), *Savin Arnold* (Lic., Focșani), *Savin C. Ioan* (Lic. Milit., Iași), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iași), *Scurtu O. Nicolae* (Lic., Brașov), *Stan I. Aurelian* (Lic. Milit., Iași), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (Student, Leoben) *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara), *Zaharia O. Nicolae* (Lic., Constanța), și *Zamfirescu George*.

662. — *Fie* A′ B′ C′ *triunghiul format de bisectoarele exterioare ale unui triunghiu* A B C. *Să se construiască triunghiul* A B C, *când se cunoaște punctul* A *și centrele cercurilor circumscrise celor două triunghiuri.*

NICOLAE I. MANOLESCU



Considerăm problema rezolvită, A B C și A′ B′ C′ fiind triunghiurile construite în condițiile problemei, O_1 și O centrele cercurile circumscrise lor.

Observăm că cercul O_1 este cercul lui *Euler* în triunghiul A′ B′ C′, fiindcă A, B, C sunt picioarele înălțimelor acestui triunghiu. Știm încă că:

$$O O_1 = O_1 H \qquad \text{și} \qquad H A_1 = A_1 A'$$

De aci rezultă următoarea construcție:

Prelungim pe $O O_1$ cu o lungime egală cu ea și obținem astfel punctul H. Din O_1 cu $O_1 A$ cunoscut, construim un cerc, care taie pe A H prelungită, in A_1. Prelungim apoi pe $H A_1$ cu o

lungime egală cu ea și obținem vârful A'.

Descrim din O cu O A' cunoscut ca rază un cerc, care va tăia în B', C' perpendiculara în A pe A H.

Ducem din B' și C' perpendiculare respectiv pe A' C' și A' B', avem astfel punctele B și C.

Triunghiul A B C este astfel construit.

Soluții date de dnii: *Albeață N. Ermil* (Lic., Piatra-Neamț), *Aldea N. Nicolae* (Lic., Mrea Dealu), *Arsene Alexandru* (Lic. Milit., Iași), *Balaban I. Gh.* (Lic. Bârlad), *Cosniță Cezar* (Bârlad), *Dăscălescu Hristache* (Lic., Focșani), *Ghișoiu I. Petre* (Lic. Spiru-Haret, București), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Hohoi V.* (Lic., Brașov), *Ignat Paul* (Lic. Milit, Iași), *Iliovici Gh. C-tin*, *Ionescu C.* (Lic. Mil., Iași), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Panaite N. Theodor* (Lic. Milit. Iași), *Popovici M.* (Focșani), *Râmniceanu I. Cristian* (Lic. Milit., Iași), *Roman I. Ioan* (Lic. Mihai-Viteazu, București), *Savin Arnold* (Lic., Focșani), *Savin C. Ioan* (Lic. Milit., Iași), *Scurtu A. Nicolae* (Lic., Brașov), *Vasiliu Gh. Gh.* (Student, Loeben), *Vâlceanu N. Iustin* (Șc. Polit., Timișoara) și *Zaharia O. Nicolae* (Lic.. Constanța).

906. *Să se găsească numărul întreg* P *format din numărul* $N+1$ *scris după* N *știind că* P^2 *se obține scriind pe* $(N+1)^2$ *după produsul* $N(N+1)$.

COL. GH. BUICLIU

Fie p numărul cifrelor lui N, atunci produsul $N(N+1)$ poate avea $2p-1$ sau $2p$ cifre și conform enunțului avem:

$$(1)\quad \begin{cases} P = 10^p N + N + 1 \\ P^2 = 10^{2p-1} N(N+1) + (N+1)^2 \end{cases}$$

sau:

$$(2)\quad \begin{cases} P = 10^p N + N + 1 \\ P^2 = 10^{2p} N(N+1) + (N+1)^2 \end{cases}$$

1°. Să cercetăm sistemul (1). Ridicăm prima relație din (1) la patrat și ținând seama de a 2^a relație putem scri:

$$10^{2p} N^2 + 2 \cdot 10^p N(N+1) + (N+1)^2 =$$

$$\therefore \quad 10^{2p-1} N(N+1) + (N+1)^2$$

$$10^{2p} N^2 + 2 \cdot 10^p N(N+1) = 10^{2p-1} N(N+1)$$

Simplificând cu $10^p N$, obținem:

$$10^p N + 2(N+1) = 10^{p-1}(N+1)$$

De aci deducem:

$$N = \frac{10^{p-1} - 2}{10^p - 10^{p-1} + 2} = \frac{10^{p-1} - 2}{10^{p-1} \cdot 9 + 2}$$

Numitorul fiind mai mare ca numărătorul, N n'ar putea fi număr întreg cum cere problema și deci sistemul (1) nu poate fi satisfăcut conform enunțului.

2°. Să cercetăm sistemul (2). Ridicăm prima relație din (2) la patrat și egalăm cu valoarea lui P^2 din 2^a, avem:

$$10^{2p} N^2 + 2 \cdot 10^p N(N+1) + (N+1)^2 =$$

$$10^{2p} N(N+1) + (N+1)^2$$

$$\therefore \quad 2 \cdot 10^p N(N+1) = 10^{2p} N$$

Simplificând cu $10^p N$, obținem:

$$2(N+1) = 10^p$$

De aci deducem:

$$N = 10^{p-1} \cdot 5 - 1$$

Notând, $p - 1 = n$, avem că forma lui N este:

$$N = 10^n \cdot 5 - 1.$$

Numărul întreg P cerut este deci de forma:

$$P = 10^{n+1}(10^n \cdot 5 - 1) + 10^n \cdot 5$$

Astfel pentru $n = 0, 1, 2, \ldots n$ resultă că P este respectiv.

$$45,\ 4950,\ 499500, \ldots 499 \ldots 9500 \ldots 0,$$

ultimul număr având pe 9 și pe 0 repetați fiecare de n ori.

Soluții date de dnii: *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Ghilezan A. Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu P. Haralamb* (absolvent, Oltenița), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța), *Haralamb P. Ionescu* (Oltenița), și *Savin C. Ioan* (Șc. Milit., de Artilerie).

Au găsit numai soluția 45, dnii: *Băcicov B.* (Tighina), *Constantinescu P. Mircea* (Lic. Matei Basarab, București), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit. Timișoara), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei Basarab, București) și *Weismann Mauriciu* (Lic., Constanța)

911. — *Fiind dat:*

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{a},$$

se cere să se stabilească identitatea:

$$a^3 \sin mx + 3a^2 m \sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$3a m^2 \sin(mx + \pi) + m^3 \sin\left(mx + \frac{3\pi}{2}\right) =$$

$$(a^2 + m^2)^{\frac{3}{2}} \sin(mx + 3\varphi)$$

Să se verifice în cazul particular $a = m = 1$.

V. ALACI

Prima soluție. Imsemnând cu E primul membru al identității cerute și observând că:

$$\sin\left(mx+\frac{\pi}{2}\right)=\cos mx,\ \sin(mx+\pi)=$$

$$-\sin mx,\ \sin\left(mx+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos mx,$$

putem scri:

(1) $E=(a^3-3am^2)\sin mx-(m^3-3a^2m)\cos mx$

Din relația dată, care se poate scri:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{m}{a},$$

deducem ușor:

$$\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{a},\qquad \frac{\sin\varphi}{1}=\frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}$$

deci:

(2) $a=(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi,\qquad m=(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\sin\varphi$

Coeficienții lui $\sin mx$ și $\cos mx$ din (1), ținând seamă de relația dată și de relațiile (2) se pot scri:

$$a^3-3am^2=a^3(1-3\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{a^3}{\cos^2\varphi}\times$$

$$(\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi)=\frac{a^3}{\cos^2\varphi}(4\cos^2\varphi-3)$$

$$=(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}}(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)$$

$$m^3-3a^2m=m^3(1-3\cot^2\varphi)=\frac{m^3}{\sin^2\varphi}\times$$

$$(\sin^2\varphi-3\cos^2\varphi)=\frac{m^3}{\sin^2\varphi}(4\sin^2\varphi-3)$$

$$=(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}}(4\sin^3\varphi-3\sin\varphi)$$

Ținând seamă de relațiile cunoscute:

$$4\cos^3\varphi-3\cos\varphi=\cos3\varphi$$

$$3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=\sin3\varphi,$$

putem scri încă:

$$a^3-3am^2=(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}}\cos3\varphi,$$

$$m^3-3a^2m=(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}}\sin3\varphi$$

Introducând aceste valori în relația (1) obținem:

$$E=(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}}(\sin mx\cos3\varphi+\cos mx\sin3\varphi)=$$

$$(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}}\sin(mx+3\varphi)$$

Identitatea cerută este astfel stabilită:

Cazul particular $a=m=1$.

In acest caz, relația dată devine:

$$\operatorname{tg}\varphi=1,\qquad \text{de unde}\qquad \varphi=\frac{\pi}{4},$$

și identitatea devine:

(3) $$\sin x+3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+3\sin(x+\pi)+$$

$$\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

Insemnând cu E primul membru, putem scri succesiv:

$$E=\sin x+3\cos x-3\sin x-\cos x=2(\cos x-\sin x$$

$$=2\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x\right]=4\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2^{\frac{3}{2}}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right),$$

ceiace invederează identitatea.

Soluții date de dnii: *Antonescu P. Aurel* (Șc. Polit., București), *Băcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Cuciureanu Ștefan* (Lic, Milit., Iași), *Derenbaum M.* (bacalaureat, Tighina), *Ghilezan Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit. București), *Jeba C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Mereuță Emilian* (Șc. Polit,, București), *Mihăilescu N. N.* (Lic., Constanța), *Oelze Emil* (Șc. Polit., Timișoara), *Rusu D. Ctin* (Lic., Constanța), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vasu Vasile.*

Soluția a 2-a. Ne propunem a afla derivata a 3-a a funcțiunei:

(1) $$y=e^{ax}\sin mx$$

Insemnăm:

(2) $$e^{ax}=u,\qquad \sin mx=v$$

Avem de aflat derivata a 3-a a unui produs de forma:

$$y = u\,v\,,$$

și după formula lui *Leïbnitz*, putem scri:

(3) $\quad y''' = u'''v + 3\,u''v' + 3\,u'v'' + v\,.\,v'''.$

Cum din (2) resultă:

$$u' = a\,e^{ax}, \qquad u'' = a^2 e^{ax}, \qquad u''' = a^3 e^{ax}$$

$$v' = m\cos mx = m\sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v'' = m^2 \sin(mx + \pi), \qquad v''' = m^3 \sin\left(mx + \frac{3\pi}{2}\right)$$

înlocuind în (3) obținem:

$$(4)\quad y''' = e^{ax}\left[a^3 \sin mx + 3\,a^2 m \sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) + 3\,a\,m^2 \sin(mx + \pi) + m^3 \sin\left(mx + \frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Putem obține însă și pe cale directă derivata 3-a a funcțiunei (1).

Astfel derivând o dată funcțiunea (1) avem:

$$(5)\quad y' = a\,e^{ax}\sin mx + m\,e^{ax}\cos mx = a\,e^{ax}\left(\sin mx + \frac{m}{a}\cos mx\right)$$

Ținând seamă de relația dată:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{a}$$

din care deducem ușor:

$$a = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\,,$$

relația (5) devine:

$$y' = e^{ax}(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\,(\sin mx + \operatorname{tg}\varphi\cos mx)$$

$$^{**}_{*}\ (6)\quad y' = e^{ax}(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\sin(mx + \varphi)$$

Observând funcțiunea (1) și derivata sa, dată de relația (6) deducem o regulă simplă, care ne permite de a trece direct de la funcțiunea (1) la o derivată de un ordin oarecare a sa, avem astfel:

$$y^{(n)} = e^{ax}(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}\sin(mx + n\varphi)$$

Luând $n = 3$, avem:

$$(7)\quad y = e^{ax}(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}\sin(mx + 3\varphi)$$

Egalând ambii membrii a-i relațiilor (4) și (7) și simplificând prin e^{ax}, găsim:

$$a^3 \sin mx + 3\,a^2 m \sin\left(mx + \frac{\pi}{2}\right) + 3\,a\,m^2 \sin(mx + \pi) + m^3 \sin\left(mx + \frac{3\pi}{2}\right) = (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}\sin(mx + 3\varphi).$$

Identitatea dată este astfel stabilită:

Soluții dale de dnii: *Ghilezan A.* (Șc. Polit., Timișoara), *Jeba C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Pupezescu Gh. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), și *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara).

926. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\Sigma(x - y)(x + y + 2z - 2)(x + y + 1)^2 = 4(z - x)(z - y)(y - x)$$

CEZAR COSNITA

Considerăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x+y+1)^2 & (z+x+1)^2 & (y+z+1)^2 \\ (x+y-1)^2 & (z+x-1)^2 & (y+z-1)^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Dezvoltând după elementele primei linii obținem succesiv:

$$\Delta = (x+y+1)^2[(z+x-1)^2 - (y+z-1)^2] - (z+x+1)^2[(x+y-1)^2 - (y+z-1)^2] + (y+z+1)^2[(x+y-1)^2 - (z+x-1)^2] = (x+y+1)^2 \times (x+y+2z-2)(x-y) - (z+x+1)^2 \times (x+z+2y-2)(x-z) + (y+z+1)^2 \times (x+z+2x-2)(y-z)$$

Deci:

$$(1)\quad \Delta = \Sigma(x-y)(x+y+2z-2)(x+y+1)^2$$

Avem astfel primul membrul al identității date.

Putem dezvolta determinantul Δ și în modul următor.

Scădem elementele coloanei întâi pe rând din elementele celorlalte coloane şi avem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (z-y)(y+z+2x+2) & (z-x)(x+z+2x+2) \\ (z-y)(y+z+2x-2) & (z-x)(x+z+2y+2) \end{vmatrix} =$$

$$(z-x)(z-y)\begin{vmatrix} y+z+2x+2 & z+x+2x+2 \\ y+z+2x-2 & z+x+2y-2 \end{vmatrix}$$

Scăzând elementele liniei întâia din elementele liniei a doua, putem scri:

$$\Delta = 4(z-x)(z-y)\begin{vmatrix} y+z+2x+2 & z+x+2y+2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

De unde:

$$\Delta = 4(z-x)(z-y)(y-x) \tag{2}$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), vedem că identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţii date de dnii: *Ieba C. C-tin* (Şc. Polit,. Timişoara), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), şi *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara),

Alte soluţii date de dnii: *Codreş I. Elorian* (bacalaureat) *Cuciureanu Ştefan* (Lic. Milit., Iaşi), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Parepeanu C. I.* (Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenita), *Rusu D. Ctin* (Lic., Constanţa) şi *Rusu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

952[1]. — Se cer patratele perfecte $abbacb$ în care ab este un bipatrat.

EMILIAN MEREUTA

960. — Să se găsească un număr de patru cifre $abcd$, stiind că:

$$abcd = (ab)^3 + (bc)^2 + cd$$

ION GH. POPA

915[2]. — Intr'un cerc O, se înscriu două triunghiuri ABC şi ADE, unde AE este un diametru al cercului O. Ducând înălţimele BF şi DG, să se arate că avem:

$$\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{DG} = 2\,\overline{AD}\cdot\overline{OE}\cdot\overline{GE}\cdot\overline{BF}$$

TRAIAN MARINEANU

961. — In triunghiul ABC, avem $\sphericalangle A = 60^0$. Să se arate că vârfurile B, C, ortocentrul, centrele cercurilor circumscris, înscris şi exînscris în unghiul BAC, sunt şase puncte conciclice şi reci. proc, dacă cele şase puncte de mai sus sunt conciclice, avem $\sphericalangle A = 60^0$.

CEZAR COSNITA

962. — Să se determine a şi b astfel ca limita pentru $x = \infty$, a expresiunei:

$$\sqrt[5]{a x^5 + (b+1)x^4 + 1} - \sqrt[5]{b x^5 + x^4 - 1},$$

să fie egală cu 2.

V. ALACI

963. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sum_{i=1}^{n} \log_{B_i} x = A$$

ION C. SCHILERU-DILI

964. — Să se demonstreze că A, B, C fiind cele trei unghiuri ale unui triunghiu în care:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

avem în mod identic:

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

Să se deducă de aci că un triunghiu în care se aplică teorema lui *Pitagora* nu poate fi de cât dreptunghiu.

A. HOLLINGER

965. — Notaţiile fiind cele obicnuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\sum a \operatorname{tg}\frac{A}{2} \sum \frac{h_a}{\sin B} = 2\sum a r_a$$

I. PUPEZESCU

966. — Să se arate că:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k a}{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotg} k a} = \frac{\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cosec} 2ka - \operatorname{cotg} 2ka)}{\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cosec} 2ka + \operatorname{cotg} 2ka)}$$

ION MARGINEANU

[1]) Anulăm problema 952 din numărul trecut, ea mai fiind publicată sub No. 928, şi o înlocuim cu prezenta.

[2]) Anulăm problema 915, fiind greşit enuntată şi o înocuim cu prezenta.

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Balta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadona (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. Iosé (Uruguay), *B. Iekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu.*

Acei dintre corespondenții noștrii cari doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul X-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 IANUARIE 1931 NO. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 CEZAR COSNITA RELATII METRICE DEDUSE CU AJUTORUL INVERSIUNEI
2. NOTE MATEMATICE: 25, 26, 27
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 912, 921, 922, 927, 931, 932, 934, 935, 936
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişaaro.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 120 lei.
Anul III, broşat, 120 lei.
Anul IV, broşat, 120 lei.
Anul V, broşat, 120 lei.
Anul VI, broşat, 120 lei.
Anul VII, broşat, 120 lei.
Anul VIII, broşat, 120 lei.
Anul IX, broşat 120 lei.

ANUL X — NO. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1931.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

RELATII METRICE DEDUSE CU AJUTORUL INVERSIUNEI

de CEZAR COSNITA

Se știe că metoda înversiunei ne permite să transformăm nu numai proprietățile proective ale figurilor dar și multe relațiuni metrice ale figurilor. In felul acesta unele relațiuni metrice, la a căror demonstrare întâmpinăm uneori piedici serioase, se pot reduce, printr'o inversiune convenabilă efectuată asupra figurei inițiale, la relațiuni evidente cari după niște simple înlocuiri ne conduc la relațiunile propuse.

In rândurile de mai jos voiu trata câteva exemple din cari se va vedea cât de expeditivă e uneori această metodă.

1. *In triunghiul* A B C *se duce bisectoarea interioară a unghiului* A *și fie* D *piciorul ei pe latura* B C.

Să se stabilească relația:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Demonstrarea directă a relației precedente e foarte simplă. Iată o soluție tot așa de simplă prin inversiune:

Luăm ca pol punctul A iar ca putere de inversiune un număr oarecare K. In acest caz, laturei B C îi corespunde un cerc ce trece prin A și care tae laturile A B, A C în punctele B′, C′ — inversele punctelor B, C iar bisectoarea A D în punctul D′ — inversul punctului D.

Avem, evident egalitatea:

$$D'B' = D'C'.$$

Se știe însă că avem:

$$D'B' = DB\frac{K}{AD.AB}, \quad D'C' = DC\frac{K}{AD.AC},$$

Ducând în relația precedentă și simplificând, avem tocmai relația propusă.

2. *Pe latura* B C *a triunghiului* A B C *se iau două puncte:* D, E — *picioarele a două isogonale în raport cu unghiul din* A. *Să se stabilească relațiunea:*

$$\frac{DB}{DC}\,\frac{EB}{EC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Facem o inversiune de pol A și modul K. Inversele punctelor B, C, D, E vor fi situate pe un cerc — inversul dreptei B C — care trece prin A. Deoarece avem:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle EAC,$$

rezultă imediat egalitățile:

$$D'B' = E'C', \qquad D'C' = E'B'.$$

Cum însă avem:

$$D'B' = DB\frac{K}{AD.AB}, \quad E'C' = EC\frac{K}{AE.AC}\ldots,$$

egalitățile precedente devin:

$$DB.AE.AC = EC.AD.AB,$$

$$DC.AE.AB = EB.AD.AC,$$

cari prin împărțire ne dau relațiunea cerută.

3. *Relațiunea lui Stewart: Dacă* D *este un punct arbitrar pe latura* B C *a unui triunghiu* A B C, *atunci avem relațiunea următoare:*

$$BD.\overline{AC}^2 + CD.\overline{AB}^2 - BC.\overline{AD}^2 = BC.CD.BD$$

Facem o inversiune ca mai înainte, luând polul în A iar modulul egal cu K. Fie B′, C′, D′ inversele punctelor: B, C, D. In patrulaterul înscriptibil A B′ D′ C′, avem:

$$\text{aria } AB'D' + \text{aria } AC'D' -$$

$$\text{aria } AB'C' = \text{aria } B'C'D'$$

(Am presupus punctul D situat între B şi C).

Din relaţiunea precedentă deducem uşor următoarea:

$$AB'.B'D'.AD' + AC'.C'D'.AD' -$$
$$AB'.B'C'.AC' = B'C'.C'D'.B'D'.$$

Făcând aici următoarele înlocuiri:

$$AB' = \frac{K}{AB}\cdots,\quad B'C' = BC\frac{K}{AB.AC}\cdots,$$

avem:

$$K^3\frac{BD}{\overline{AB^2}.\overline{AD^2}} + K^3\frac{CD}{\overline{AC^2}\cdot\overline{AD^2}} -$$
$$K^3\frac{BC}{\overline{AB^2}\cdot\overline{AC^2}} = K^3\frac{BC.CD.BD}{\overline{AB^2}\cdot\overline{AC^2}\cdot\overline{AD^2}}.$$

Făcând simplificările posibile, obţinem relaţia lui *Stewart*.

4. *Pe latura* BC *a triunghiului* ABC — *între* B *şi* C, *de exemplu — se iau două puncte arbitrare* D, E. *Să se stabilească relaţia.*

$$BC.BE.CE.\overline{AD^2} + BD.DE.BE.\overline{AC^2} =$$
$$BC.BD.CD.\overline{AE^2} + CD.DE.CE.\overline{AB^2}.$$

Facem tot o inversiune de pol A şi modul K. Fie B', C', D', E' inversele punctelor: B, C, D, E. In patrulaterul inscriptibil B'C'E'D', avem relaţiunea:

$$\text{aria } B'C'E' + \text{aria } B'D'E' =$$
$$\text{aria } C'B'D' + \text{aria } C'D'E'.$$

Deducem de aici imediat:

$$B'C'.C'E'.B'E' + B'D'.D'E'.B'E' =$$
$$B'C'.B'D'.C'D' + C'D'.D'E'.C'E'.$$

Inlocuind aici:

$$B'C' = BC\frac{K}{AB.AC}\cdots,$$

avem, după ce facem simplificările posibile, relaţia propusă. In acelaş mod se obţin relaţii analoage, când punctele D, E ocupă alte poziţii în raport cu punctele B, C.

5. M *fiind un punct arbitrar pe ipotenuza* BC *a triunghiului dreptunghic* ABC, *să se stabilească relaţia:*

$$\overline{AB^2}\cdot\overline{MC^2} + \overline{AC^2}\cdot\overline{MB^2} = \overline{BC^2}\cdot\overline{AM^2}.$$

(Van Aubel)

Demonstraţia directă a acestei relaţii cred că nu-i tocmai simplă. Dealtfel în *„Recueil de problèmes Mathématiques" par C. A. Laisant*, problema e indicată ca nerezolvată. Prin inversiune însă soluţia este imediată. Iau ca pol punctul A, iar ca modul numărul K. Fie B', C', M' inversele punctelor B, C, M. Patrulaterul AB'C'M' este înscriptibil într'un cerc de diametru B'C'. Triunghiul M'B'C' fiind dreptunghic, avem:

$$\overline{M'B'^2} + \overline{M'C'^2} = \overline{B'C'^2}.$$

Inlocuind aici:

$$M'B' = MB\frac{K}{AM.AB}\cdots,$$

avem imediat relaţia propusă.

6. P *fiind un punct pe arcul* AB *al cercului circumscris triunghiului equilateral* ABC, *să se stabilească relaţia:*

$$PC = PA + PB.$$

Dacă se înlocueşte triunghiul equilateral cu un patrat, avem relaţiunea:

$$PC.PD = PB.PC + PA.PB + PD.PA.$$

Facem o inversiune luând punctul P ca pol, iar numărul K drept modul. Cercul devine o dreaptă pe care sunt aşezate punctele: A', B', C', inversele punctelor: A, B, C. Observăm că avem relaţia:

$$A'B' = A'C' + C'B'.$$

Inlocuind aici:

$$A'B' = AB\frac{K}{PA.PB}\cdots,$$

avem:

$$K\frac{AB}{PA.PB} = K\frac{AC}{PA.PC} + K\frac{CB}{PC.PB}$$

Simplificând şi observând că avem:

$$AB = AC = CB,$$

deducem relaţia propusă.

Pentru patrat demonstraţia este analoagă. Inlocuind patratul cu un pentagon regulat, avem relaţia:

$$PC.PD.PE = PB.PC.PD + PA.PB.PC + PA.PB.PE + PA.PD.PE.$$

Din aproape în aproape relațiunea se poate extinde la un poligon regulat de n laturi.

Să stabilesc acum o teoremă pe care o voiu folosi mai departe:

Se consideră un triunghiu oarecare ABC *și fie* B', C' *inversele punctelor* B, C *în raport cu* A *ca pol și* K *drept modul. Iau pe* BC *un punct* D *și fie* D' *omologul său de pe* $B'C'$, *adică astfel ca:*

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'C'}{D'B'}.$$

In aceste condițiuni, dreptele AD, AD' *sunt isogonale față cu unghiul din* A.

Insemnez cu δ', δ punctele în cari dreapta AD' tae, a doua oară, cercul $AB'C'$ și latura BC. Din însăși definiția inversiunei rezultă că dreptele $\delta'B'$, $\delta'C'$ sunt antiparalele cu δB, δC respectiv în raport cu unghiurile $BA\delta$, $CA\delta$ iar $B'C'$ cu BC în raport cu unghiul din A. Deducem imediat relațiile:

$$\frac{\delta B}{\delta' B'} = \frac{AB}{A\delta'}, \quad \frac{\delta C}{\delta' C'} = \frac{AC}{A\delta'},$$

de unde:

$$(1) \qquad \frac{\delta B}{\delta C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\delta' B'}{\delta' C'}.$$

Avem apoi relațiile:

$$\frac{\delta' B'}{AC'} = \frac{\delta' D'}{D'C'}, \quad \frac{\delta' C'}{AB'} = \frac{\delta' D'}{D'A'},$$

de unde:

$$\frac{\delta' B'}{\delta' C'} = \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{D'B'}{D'C'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{DC}{DB}.$$

Cu aceastea relația (1) devine:

$$\frac{\delta B}{\delta C} \cdot \frac{DB}{DC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2},$$

care ne spune că dreptele AD, AD' sunt isogonale față cu unghiul din A. Dacă D_1 este punctul unde AD tae pe $B'C'$, se arată foarte lesne că punctele δ, D_1 sunt omoloage în triunghiurile ABC, $AB'C'$. Rezultă deaici *că dreapta* AD *joacă, pentru triunghiul* $AB'C'$, *acelaș rol pe care îl joacă isogonala sa* $A\delta$ *pentru triunghiul* ABC.

7. *Fie* D *punctul în care diametrul cercului circumscris triunghiului* ABC *și care trece prin vârful* A, *tae latura* BC. *Să se stabilească relația:*

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \cdot \overline{AC}^2 = \overline{AC}^2 \cdot \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 \cdot \overline{AB}^2.$$

Facem o inversiune de pol A și modul K. Fie $B'C'D'$ inversele punctelor B, C, D. Dreapta AD — conform celor spuse anterior — este înălțime în triunghiul $AB'C'$. Patrulaterul $AB'D'C'$ fiind ortodiagonal, avem:

$$\overline{AC'}^2 + \overline{B'D'}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{C'D'}^2.$$

Inlocuind aici:

$$AC' = \frac{K}{AC}, \qquad B'D' = BD\frac{K}{AB.AD} \cdots,$$

și simplificând, obținem relația propusă.

8. *Se consideră triunghiul* ABC *înscris în cercul* O; *fie* D *punctul unde simediana unghiului* BAC *întâlnește a doua oară, cercul* O. *Să se arate că patrulaterul* $ABDC$ *este armonic, adică:*

$$BD.AC = CD.AB.$$

Făcând o inversiune de pol A și modul K, cercul ABC se transformă într'o dreaptă pe care sunt așezate punctele B', D', C' — inversele punctelor: B, D, C. Din cele spuse mai înainte, rezultă că D' este mijlocul dreptei $B'C'$. Observăm relațiile:

$$B'C' = 2B'D' = 2C'D',$$

în cari înlocuind:

$$B'C' = BC\frac{K}{AB.AC} \cdots,$$

deducem:

$$BC.AD = 2AC.BD,$$

$$BC.AD = 2AB.CD,$$

de unde rezultă:

$$BD.AC = CD.AB.$$

Damonstrația directă se face de asemenea foarte ușor prin niște simple considerații de arii.

9. *Pe un cerc dat se consideră 5 puncte:* P, A, C, B, D *astfel că dreptele* PC, PD *sunt conjugate armonic în raport cu dreptele* PA, PB. *Fie* O *punctul unde simediana unghiului* APB *taie, a doua oară, cercul.*

Să se stabilească relațiile:

$$2\frac{PB}{AB}=\frac{PC}{AC}+\frac{PD}{AD},$$

$$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{PA}^2}=\frac{OC.OD}{PC.PD},\quad \frac{\overline{OB}^2}{\overline{PB}^2}=\frac{OC.OD}{PC.PD}.$$

Facem tot o inversiune de pol A și modul K. Fie A', B', C', D', O' inversele punctelor A, B, C, D, O Punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică iar O' este mijlocul lui AB. Să știe că avem relațiile:

$$\frac{2}{A'B'}=\frac{1}{A'C'}+\frac{1}{A'D'},$$

$$\overline{O'A'}^2=\overline{O'B'}^2=O'C'.O'D'.$$

Inlocuind aici:

$$A'B'=AB\frac{K}{PA.PB}\cdots,$$

obținem imediat relațiile propuse.

Incheiu aici șirul de relații pe cari mi le propusesem să le stabilesc cu ajutorul inversiunei și sper că ele vor reuși să familiarizeze pe corespondenții *„Revistei Matematice"*, pe cei cari nu o cunosc, cu această metodă.

NOTE MATEMATICE

25. — *Problema 662.* Urmărind figura de la pagina 116, se poate observa:

1°. Că problema se rezolvă la fel, ori care din vârfurile A, B, C s'ar fi dat.

2°. Dacă, în loc de unul din acele vârfuri, s'ar fi dat unul din vârfurile triunghiului A', B', C' construcția triunghiului ABC se face în felul următor:

Se construește H ca la pagina 116, se ia mijlocul A_1 al lui HA', apoi se construește cercul O_1 de rază O_1A_1. Acest cerc este tăiat în A de $A'A_1$. Perpendiculara în A pe A'A tae cercul O de rază OA' în B', C', iar intersecția lui A'B', A'C', cu cercul O_1 determină pe B și C.

E de observat că, în general, A'C' tae pe O_1 în 2 puncte din care unul B este înălțimea B'B iar celalt este mijlocul laturi A'C'.

Problema este totdeauna posibilă.

COL. GH. BUICLIU

---

26. — *O problemă.* In *R. M. T.* Anul X pag. 46—47 se găsește rezolvată următoarea problemă:

Să se pună polinomul:

$$2x^3-15x^2+78x-92$$

sub forma:

$$A(x+a)^3+B(x-8)^3,$$

(publicată sub N-rul 876).

In „Teoria ecuațiilor de *N. Abramescu* la pag. 22 se găsește următoarea problemă, care generalizează problema de mai sus:

Să se rezolve ecuația

$$(1)\qquad f(x)=Ax^3+3A_1x^2+3A_2x+A^3=0$$

punând-o sub formă:

$$(2)\qquad f(x)\equiv\alpha(x-\beta)^3+\alpha'(x-\beta')^3=0.$$

Relațiile dintre coeficenții ecuațiilor (1) și (2) sunt:

$$\alpha+\alpha'=A_0,\qquad \alpha\beta+\alpha'\beta'=-A_1$$

$$\alpha\beta^2+\alpha'\beta'^2=A_2,\qquad \alpha\beta^3+\alpha'\beta'^3=-A_3.$$

Prin eliminări se arată că ecuația care dă pe β și β' este:

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & -u & u^2 \end{vmatrix}=0.$$

In cazul problemei 876 ecuația care ne dă pe a și b este:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 26 \\ -5 & 26 & -92 \\ 1 & -u & u^2 \end{vmatrix}=0.$$

Desvoltând după *Sarrus* şi reducând, avem:

$$27\,u^2 - 54\,u - 216 = 0$$

$$u_1 = -2 \qquad u_2 = 4 \qquad \text{sau}$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

Apoi se găseşte uşor:

$$A = \frac{3}{2},\ B = \frac{1}{2} \quad \text{şi} \quad A = \frac{1}{2},\ B = \frac{3}{2}$$

Polinonul se pune sub forma:

$$2x^3 - 15x^2 + 78x - 92 = \frac{1}{2}(x+2)^3 + \frac{3}{2}(x-4)^3$$

Dacă egalăm polinonul dat cu zero, avem o ecuaţie de gradul al treilea pe care o putem rezolva. Putem scrie:

$$\left(\frac{x+2}{4-x}\right)^3 = 3$$

sau:

$$\frac{x+2}{4-x} = \sqrt[3]{3}\; e^{i\frac{2kx}{3}}$$

şi

$$x = \frac{4\sqrt[3]{3}\; e^{i\frac{2kx}{3}} - 2}{\sqrt[3]{3}\; e^{i\frac{2kx}{3}} + 1},\quad k = 0, 1 \text{ şi } 2$$

PETRE I. GHISOIU

---

27. — *Asupra însemnătăţii filosofice a „Elementelor" lui Euclid.*

Două opere mari, de o însemnătate capitală, una în desvoltarea ştiinţelor în genere, cealaltă în desvoltarea ştiinţelor matematice — şi amândouă în aceeaşi măsură înfluenţând puternic gândirea logică a tuturor marilor revoluţionari ai lumii ideilor, dealungul secolelor până azi, ne-au rămas de pe timpul vechilor greci: Logica lui *Aristot*, expusă în tratatul său de *Analitice* şi tratatul elementar de matematici al lui *Euclid*. Despre logica, aşa cum a fost concepută şi cum ne-a rămas dela *Aristot*, *Kant*[1] s'a exprimat cam în felul următor: „logica nu va avea de făcut nici un pas înainte aşa cum n'a fost obligată să facă un pas îndărăt şi după toate aparenţele ea este închisă şi definitiv terminată".

Alături de *Analiticele* lui *Aristot*, pentru acelaşi motiv de a fi străbătut toate timpurile fără să fi suferit corecţiuni ci numai — de data aceasta — adaosuri, situăm *Elementele* lui *Euclid*. Pe lângă însemnătatea lor geometrică, Elementele prezintă şi un model perfect de aplicare a principiilor de logică — deductive — formulate de *Aristot*, stabilnd astfel[1] „o extensiune şi în acelaş timp o promaţiune particulară a logicei generale". Nu se poate spune însă că logica matematică a lui *Euclid*, cu toate că Elementele sale sunt precedate de operele lui *Aristot*, este numai o aplicare pe un teren special a principiilor generale ale logicei aristoteliciene; operele lui *Euclid* şi *Aristot* sunt independente una de alta şi geniul lui *Euclid* ar fi creat tot aşa de bine acea minunată logică a Elementelor sale, chiar dacă ar fi precedat pe *Aristot*[2].

In Grecia s'au compus chiar înainte de *Euclid* multe alte Elemente, de valori însă aproape neînsemnate pe lângă Elementele sale; notăm Elementele de geometrie[3], ale lui *Hippocrate* din Chios (cam pela 400 î. C), cari însă nu ni s'au păstrat până azi. Am zis că celelalte Elemente sunt de o însemnătate aproape nulă faţă de Elementele lui *Euclid* — şi afirmaţia se poate extinde fără recitenţe şi asupra multora dintre tratatele elementare de matematici apărute după el, până în zilele noastre — pentrucă aproape toate sunt necomplecte şi nu prezintă sinteza necesară de cunoştinţe, care neaparat trebuesc să fie expuse într'un astfel de tratat.

Şi nu e lucru uşor să alegi şi mai ales să ordonezi în modul cel mai convenabil pentru a fi înţeles şi în acelaşi timp în modul cel mai natural, elementele unei ştiinţe, acele fundamente pe cari se sprijină restul creaţiilor ştiinţifice din

[1] *I. Kant* Critica Raţiunii pure.

[1] *Leibniz*, Nouveaux Essais.

[2] Dealtfel influenţa logicei aristoteliciene asupra operelor lui *Euclid* e indoelnică şi e mai probabilă o influenţă mai însemnată din partea şcoalei pitagoriciene.

[3] Probabil primele Elemente.

acel domeniu[1]; ceeace este mai esenţial şi în acelaş timp absolut necesar — căci nişte elemente cari ar fi: sau prea încărcate de chestiuni complimentare şi de interes secundar, sau prea concise şi chiar necomplecte, n'ar mai avea caracterul voit; — să expui fenomenele de primă însemnătate, clar şi în modul cel mai general posibil, pentruca şi elimini dificultăţile, şi chiar greşita înţelegere prin particularizări şi detalii — cari în loc să înlesnească această înţelegere, o îngreuiază.

Pentru aceste motive, cum deasemenea şi prin frumuseţea şi claritatea expunerii progresive, dela simplu şi aproape evident la mai complex, prin înlănţuirea naturală a demonstraţiilor ce păstrează constant generalitatea caracteristică, şi necesară principiilor matematice, se clasează în primul loc, printre toate tratatele elementare de matematici, *Elementele lui Euclid.*

In *Elemente* predomină geometria; o mică parte consacrată teoriei numerelor, numerelor iraţionale cum şi studiul general al rapoartelor şi proportiilor ne opresc de a spune că tratatul său e numai de geometrie. Această preferinţă era de altfel şi naturală pe timpul său, când geometria era punctul central al preocupărilor matematice.

Am putea să împărţim cuprinsul *Elementelor* în două părţi. Primele patru cărţi, prin natura conţinutului lor dau tratatului — după cum a spus *Auguste Comte* — caracterul unor *Ştiinţe naturale.* In cărţile următoare intervine un element nou, care dă mărimilor şi proprietăţilor lor un caracter mai general şi care se referă la raportul şi egalitatea mărimilor oarecari, ceeace constitue noţiunea de *proporţie*, — cu un caracter mai abstract şi cu mai puţine legături imediate cu experienţa empirică.

Geometria greacă aşa cum ne-a rămas dela *Euclid* nu ştabileşte o legătură imediată între datele experienţei şi proprietăţile figurilor asupra cărora ea operează şi nici o transmutaţie a obiectelor naturale[2] ci ea se menţine în sfera gândirii pure lucrând cu ceeace se chiamă natura obiectului, nu cu obiectul în sine. „Geometria celor vechi rămâne deci ceeace noi numim un studiu calitativ al cantităţii; e natural că ea nu conduce la studiul cantitativ al calităţilor care este principiul ştiinţei moderne"[2].

Un exemplu imediat îl avem în definiţia liniei drepte (def. IV), căreia *Euclid* a voit să-i imprime un caracter de concept pur intelectual cu gândul probabil de a masca origina-i empirică.

In ce priveşte modul în care o propoziţie trebue să fie enunţată, valabilitatea ei e condiţionată de următoarea cerinţă: un enunţ trebue să fie totdeauna riguros complect. A spune că *totul* este mai mare ca *partea* nu este complect, deoarece este ştiut că în ceeace priveşte infinitul, partea este egală cu totul; enunţul lui *Euclid* ar fi fost complect dacă ar fi adăogat că este vorba numai de mărimile finite, nu şi de cele infinite.

Pentru demonstrarea proporziţiilor sale, *Euclid* avea nevoie de nişte teoreme cari nu trebuiau demonstrate, fiind evidente: aceste teoreme el le-a numit *postulate.* Dintre postulatele lui *Euclid* unul singur a atras în mod deosebit atenţia matematicienilor de după el şi acest postulat, numit al paralelelor, a fost obiectul unor studii întinse şi foarte îndelungate. El se poate enunţa astfel:

Dacă suma unghiurilor interioare pe cari două drepte din plan le fac cu o secantă arbitrară şi de aceeaşi parte a acesteia, este mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte considerate se întâlnesc la o distanţă finită, formând cu secanta un triunghiu ale cărui două unghiuri sunt unghiurile înterioare considerate.

Incă din timpuri vechi s'a observat că evidenţa acestui postulat nu este tocmai imediată. In filosofia matematică postulatul acesta prezintă o importanţă deosebită, deoarece el a dat posibilitatea, — dupăce se căutase de atâţia matematiciani iluştri[1] fie o demonstrare a lui, fie o afirmaţie

---

[1]) In treacăt remarcăm faptul că matematicile, situate pe prima treaptă a ştiinţelor exacte, posedă şi tratatele elementare cele mai reuşite şi inclinăm spre a afirma că tocmai acest grad de exactitate determină în mare măsură posibilitatea constituirii lor.

[2]) Asupra acestei chestiuni a se vedea şi *L. Brunschvieg*, Les étapes de la philosophie mathématique, p. 97.

[2]) Idem.

[1]) Dintre cei mai de seamă cari s'au ocupat cu această chestiune, notăm: *Posldonius, Geminos, Ptolemeu* (dintre greci), *Al-Niziri, Nazir Eddin* (arabi), *F. Commandino, G. A. Borelli, G. Vitale, G. Saccheri* (italieni), *D'Alambert, Lagrange, Carnot, Laplace, Fourrier, Monge, Legendre* şi în fine cei cari i-au dat soluţia definitivă: *Lobatschefsky* şi *Bolyai.*

bazată pe raţionamente logice cum că o demonstrare nu este posibilă — creerii unor noi geometrii care azi poartă numele de geometrii *neeuclidiene* şi ale căror creatori sunt *Labatschefsky, Riemann, Poincaré.*

Postulatul lui *Euclid* nu este demonstrabil, pentrucă se poate construi, cu o ipoteză diferită[1], o geometrie completă fără lacune şi fără contradicţii[2]. Transcriem aci pentru justeţea observaţiei, următoarele rânduri din: Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'antiquité Gréco-Romaine, de *A, Reymond*: „Chestiunea ridicată de postulatul lui *Euclid*, n'a făcut altceva decât a arătat că domeniul geometriei e cu mult mai vast decât şi la închipuit *Euclid*; acestuia însă, dacă n'a putut să construiască în întregime axiomatica modernă, îi revine meritul incontestabil de ai fi pus bazele etern durabile".

Elementele lui *Euclid* cuprind în acelaş timp tratatul cel mai complect al geometriei elementare şi abordând studiul rapoartelor, chestiuni de teoria numerelor, mărimile iraţionale, indicând o corespondenţă între relaţiile geometrice pure şi cele mecanice sau astronomice[1], prezintă o înlănţuire a acestor discipline, aşa cum pe timpul său existau, constitue un început, o încercare de înglobare a tuturora într'o ştiinţă unică, universală; desigur însă că pe timpul său orizontul acestei coordonări era restrâns, aşa încât tocmai târziu *Descartes* este cel care reuşeşte să stabilească definitiv (sau aproape) unitatea logicei universale în ştiinţă.

[1]) *Riemann* susţine spre exemplu, că în plan nu există două drepte paralele.
[2]) *Dr. F. Gonseth*, Les fondementes les Mathématiques.

L. Brunschvieg ap. cit.

R. O. ZAHARIA.
student

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, No. 4 Decemvrie 1930. Généralisation d'une proposition du livre des lemmes, par *V. Thébault*. Asupra unei teoreme a d-lui *D. Pompeiu*, de *V. Ionescu*. O problemă de trigonometrie, de *Col. Gh. Buicliu*.

PROBLEME REZOLVATE

912. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{cotg}^4 x}{\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{cotg}^4 x} = 2$$

GHEORGHE CHIRILA

Dacă notăm:

$$\operatorname{tg}^2 x = y$$

şi înlocuim $\operatorname{tg} x$ în funcţie de $\operatorname{cotg} x$, atunci ecuaţia dată se poate scri:

$$\frac{y + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}} - \frac{y^2 + \frac{1}{y^2}}{y^2 - \frac{1}{y^2}} = 2$$

$$\frac{y^2 + 1}{y^2 - 1} - \frac{y^4 + 1}{y^4 - 1} = 2$$

Aducând la acelaşi numitor avem:

$$(y^2 + 1)^2 - y^4 - 1 = 2(y^4 - 1)$$

$$y^4 - y^2 - 1 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie şi ţinând seamă de notaţia făcută, obţinem:

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt[4]{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$$

Rădăcinele reale sunt:

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt[4]{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} =$$

$$\pm \sqrt[4]{\frac{1 + 2{,}236}{2}} = \pm \sqrt[4]{1{,}618}$$

Aplicând logaritmii, găsim:

$$\lg \operatorname{tg} x = \frac{0{,}20898}{4} = 0.05224, \lg \operatorname{tg}(\pi - x) = 0{,}05224$$

Deducem de aci:

$$x = k\pi \pm 48^0, 26', 17''$$

Soluţii date de dnii: *Antonescu Aurel* (Şc. Polit. Bucureşti), *Băcicov B.* (Tighina). *Băcicov Victor* (student, Iaşi), *Constantinescu P. Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (Şc. Polit. Bucureşti), *Grinberg N. Meer* (Lic. Tighina), *Lupescu Gh.*

C-tin (Lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanţa), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Pupezescu Gh. Ion* (Şc. Polit. Timişoara), *Russu D. C-tin* (Lic. Constanţa), *Savin C. Ioan* (Şc. Milit. de Artilerie), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Bucureşti), *Vasu Vasile*, *Velicescu N. Nicolae*, *Velicescu Gh. Titu* şi *Weismann Mauriciu* (Lic. Constanţa).

921. — *Patratul sumei patratelor a două numere consecutive, se poate descompune într'o sumă de două patrate şi aceste două patrate sunt numere prime între ele.*

V. ALACI

Expresia:

$$E = [n^2 + (n+1)^2]^2$$

care este patratul sumei patratelor a două numere consecutive, se poate scri succesiv:

$$E = (2n^2 + 2n + 1)^2 = 4n^4 + 4n^2 + 1 + 8n^3 + 4n^2 + 4n = (2n^2 + 2n)^2 + (2n+1)^2$$

Expresia E este descompusă astfel într'o sumă de două patrate. Pentru a arăta că aceste patrate sunt prime între ele, e suficient a arăta că numerile $2n(n+1)$ şi $2n+1$ sunt prime între el.

Numerele n, $2n+1$ sunt prime între ele căci un divizor $c \neq 1$ a lui n, ar trebue să dividă şi pe 1. Numerile

$$2(n+1), \qquad 2n+1$$

sunt prime între ele căci un divizor $c \neq 1$ a lui $2n+1$, ar trebui să dividă şi pe $2(n+1) = (2n+1)+1$, deci şi pe 1.

Factorii n şi $2(n+1)$ fiind primi fiecare cu $2n+1$, rezultă că numerile:

$$2n(n+1), \qquad 2n+1$$

sunt prime între ele.

Soluţii date de d-nii: *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Grinberg Meer* (Lic. Tighina), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marsieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic. Constanţa), *Parepeanu C. I.*, *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Purdilă A.* şi *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanţa).

Au mai soluţionat problema d-nii: *Băcicov Boris* (student, Iaşi) şi *Ghilezan Aurel* (Şc. Polit., Timişoara).

922. — *Un automobil merge pe o şosea cu viteză uniformă. Dealungul şoselei sunt înşiraţi stâlpi de telegraf la câte 50 m. După cât timp numărul intervalelor parcurse dintre stâlpi, este egal cu numărul care reprezintă viteza în Km|oră a automobilului.*

ION PROTOPOPESCU

Fie v viteza în Km/oră a automobilului. Viteza în metri pe secundă este:

$$v_1 = \frac{1000\,v}{3600} = \frac{v}{3.6}$$

După v intervale automobilul a parcurs spaţiul:

$$s = 50\,v \text{ (metri)}$$

Timpul necesar este:

$$t = \frac{s}{v_1} = \frac{50\,v}{\frac{v}{36}} = 3.6 \times 50 \text{ (secunde)}$$

De aci rezultă un mijloc simplu de a determina viteza în Km|oră pentru un vehicul care merge cu viteză uniformă, în funcţie de puncte egal distante (stâlpi de telegraf, rosturi de şină de cale ferate, etc.)

Dacă d este distanţa constantă între puncte, se numără câte asemenea puncte trec în timpul:

$$t = 3.6 \times d \text{ secunde},$$

d dat în metrii. Acest număr reprezintă viteza în Km|oră a vehicului.

Soluţii date de dnii: *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Jeba C-tin* (Şc. Polit. Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Motoc D. Mircea* (Lic. Oltenita), *Parepeanu C. I.* (Lic. Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Oltenita), *Purdilă A.* (Lic. Braşov), *Velicescu Titu* şi *Weissmann M.* (Lic. Constanţa).

Au mai soluţionat problema d-nii: *Băcicov Boris* (student, Iaşi), *Băcicov Victor* (student, Iaşi), *Constantinescu Mircea* (Bucureşti), *Ghilezan Aurel* (Sc. Polit., Timişoara) şi *Stoicescu Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti).

927. — *Să se găsească patratele de forma $abcdea$ în care ea este cub perfect, ad patrat perfect şi be tot patrat perfect.*

M. PATRON

Cuburile de forma ea, $(a \neq 0)$ sunt:

$$01, \quad 08, \quad 27, \quad 64,$$

dintre care numai 01 şi 64 sunt şi terminaţii de patrate perfecte. Patratele căutate sunt deci de forma:

(1) $\qquad 1bcd01, \qquad 4bcd64$

Ţinând seamă că ad este patrat perfect, cum a este 1 sau 4, resultă că d nu poate fi de cât 6

sau 9, astfel că numerile din (1) devin:

(2) $\qquad 1\,b\,c\,601, \qquad 4\,b\,c\,964$

Cum şi $b\,e$ este patrat perfect, e fiind 0 sau 6, resultă că b nu poate fi de cât 0, 1 sau 3, astfel că numerile din şirul (2) sau patratele cerute sunt de forma;

(3) $\qquad 10\,c\,601, \quad 41\,c\,964, \quad 43\,c\,964$

Observând că:

$$100601 \leq 10\,c\,601 \leq 109601$$

$$410964 \leq 41\,c\,964 \leq 419964$$

$$430964 \leq 43\,c\,964 \leq 439964,$$

rezultă că rădăcinele patrate ale numerilor din şirul (3) sunt cuprinse respectiv între 317, 332; 641, 649; 656, 664.

Numerile din şirul (3) trebuind să fie patrate perfecte, rădăcinele lor patrate ar trebui să se termine respectiv cu cifrele 1, 9 pentru numerile de forma $10\,c\,601$ şi 2, 8 pentru numerile de forma $41\,c\,964$ şi $43\,c\,964$.

Dintre numerile cuprinse între 317 şi 332, vom lua numai pe 319, 321, 329, 331; dar nici unul ridicat la patrat nu ne dă un număr de forma $10\,c\,601$.

Dintre numerile cuprinse între 641, 649 vom lua numai 642, 648 care ridicate la patrat nu ne dau numere de forma $41\,c\,964$.

Dintre numerile cuprinse intre 656, 664 vom lua numai 658, 662, dintre care numai patratul lui 658 ne dă un număr de forma $43\,c\,964$, astfel avem:

$$658^2 = 432964$$

Numai numărul 432964 ne dă singura soluţie a problemei.

Observare. Am fi putut folosi o tabelă de patrate perfecte, odată ce am ajuns la şirul (3), dar e de preferat demonstraţia dată mai sus.

Soluţie analoagă dată de d-l *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti).

Alte soluţii date de dnii: *Bujoreanu Vicenţiu* (bacalaureat), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Dăscălescu Şt. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Naţional, Iaşi), *Firoiu Ioan* (Lic. Arad), *Grecu M. Cristache* (Lic., Oltenita), *Grimberg Meer* (Lic., Tighina), *Jeba C-tin* (Şc. Polit., Timişoara), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marineanu* (student, Bucureşti), *Mecu I. Ilie* (Lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehed'nţi D.* (Lic. Milit, Tg. Mureş), *Mereuţă Emilian* (student), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Moţoc D. Mircea* (Oltenita) *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Nicolaescu Stelian* (Lic., R.-Vâlcea), *Parepeanu C. I.* (Lic., Braşov), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenita), *Purdilă A.* (Lic. Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Smarăndoiu N.* (bacalaureat), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Velicescu Gh. Titu* şi *Weismann Mauriciu* (Lic., Constanţa).

Au mai soluţionat problema d-nii: *Băcicov Boris* (student, Iaşi), *Băcicov P. Victor* (student, Iaşi), *Cincilian Agop* (Balcic), *Filipovici Jiva* (Bucureşti), *Georgescu Petru* (Şc. Polit. Timişoara) şi *Marşieu Teodor* (Şc. Polit. Timişoara).

931. — *Dacă a şi b sunt două numere reale pozitive $a < b$, să se demonstreze că avem:*

$$\sqrt[8]{a^3} < \frac{5}{8} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[8]{b^5} - \sqrt[8]{a^5}} < \sqrt[8]{b^3}$$

Să se verifice în cazul particular $a = 1$, $b = 2$.

V. ALACI

Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă într'un interval şi a şi b două numere din acest interval $(a < b)$, atunci *Teorema creşterilor finite*, ne permite a scri:

(1) $\qquad f(b) - f(c) = (b-a) f'(c), \qquad a < c < b.$

Să aplicăm această teoremă funcţiunei:

$$f(x) = x^{\frac{5}{8}}$$

atunci:

$$f'(x) = \frac{5}{8} x^{-\frac{3}{8}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$$

In virtutea formulei (1) putem scri:

$$b^{\frac{5}{8}} - a^{\frac{5}{8}} = (b-a) - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{c^3}}, \qquad a < c < b.$$

De aci deducem:

(2) $$\sqrt[8]{c^3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{b-a}{\sqrt[8]{b^5} - \sqrt[8]{a^5}}$$

Cum ştim că:

$$a < c < b$$

şi aceste numere a, b, c sunt reale, rezultă, încă:

$$a^3 < c^3 < b^3$$

deci şi:

$$\sqrt[8]{a^3} < \sqrt[8]{c^3} < \sqrt[8]{b^3}$$

Inlocuind valoarea lui $\sqrt[8]{c^3}$ dată de (2) avem:

$$\sqrt[8]{a^3} < \frac{b-a}{\sqrt[8]{b^5} - \sqrt[8]{a^5}} < \sqrt[8]{b^3},$$

adică tocmai dubla inegalitate cerută.

Cazul particular $a = 1$, $b = 2$.

In acest caz trebuie să verifcăm că avem:

$$(3) \qquad 1 < \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{32} - 1} < \sqrt[8]{8}$$

Dar:

$$\lg \sqrt[8]{32} = \frac{1{,}50515}{8} = 0{,}18814$$

$$\lg \sqrt[8]{8} = \frac{0.90309}{8} = 0{,}11288$$

Deducem:

$$\sqrt[8]{32} = 1{,}542$$

$$\sqrt[8]{8} = 1{,}296$$

Inlocuind în (3) avem:

$$1 < \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{0.524} < 1{,}296$$

sau:

$$1 < 1{,}13 < 1{,}296$$

ceea ce se verifică:

Soluții date de d-nii: *Băcicov Boris* (student, Iași), *Băcicov Victor* (student, Iași), *Curchi Ioan* (bacalaureat, Chișinău), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit. București), *Ieba C-tin* (Șc. Polit. Timișoara), *Marineanu Traian* (student, București), *Marșieu Teodor* (Șc, Polit. Timișoara), *Mereuță Emilian* (Șc. Polit. București), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Pupezescu Gh. Ion* (Șc. Polit. Timișoara), *Velicescu N. Nicolae* și *Mihăileanu N.* (Lic. Constanța).

Altă soluție dată de dl: *Savin C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie).

932. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\sqrt[3]{536 + x} + \sqrt[3]{536 - x} = 16$$

IOAN CURCHI

Ridicând la cub avem:

$$536 + x + 536 - x + 3\sqrt[3]{536^2 - x^2} \times \left(\sqrt[3]{536 + x} + \sqrt[3]{536 - x}\right) = 4096$$

Simplificând și ținând seamă de însuși ecuația dată, avem:

$$48\sqrt[3]{536^2 - x^2} = 3024$$

$$\sqrt[3]{536^2 - x^2} = 63$$

Ridicând la cub, găsim:

$$287296 - x^2 = 250047$$

$$x^2 = 37249$$

Extrăgând rădăcina patrată avem:

$$x = \pm 193$$

Ambele valori ale lui x verifică ecuația dată.

Soluții date de dnii: *Băleanu Noli* (Lic. Milit., Craiova), *Beral H.* (Lic. Național, Iași), *Ciupe Aețius* (bacalaureat, Bistrița), *Codreș I. Florian* (bacalaureat), *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Grinberg Meer* (Lic., Tighina), *Grossu I. Aurel* (Lic. Carol, Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emilian* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Parapeanu C. I.* (Lic., Brașov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița) *Purdilă A.* (Brașov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța), *Savin C. Ioan* (Șc. Milit., de Artilerie), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara), *Velicescu N. N.*, *Velicescu Gh. Titu* și *Weismann Mauriciu* (Lic., Constanța), și o soluție neiscălită.

Observare. Dnii: *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța), *Savin C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie) *Țiucra Mircea* (Școala Polit. Timișoara) au rezolvat ecuația mai generală:

$$\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = b,$$

găsind soluția:

$$x = \pm \sqrt{a^2 - \left(\frac{b^3 - 2a}{3b}\right)^3}$$

Au mai soluționat problema d-nii: *Băcicov Boris* (Iași), *Constantinescu Mircea* (București), *Georgescu Petre* (Șc. Polit. Timișoara), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit. Timișoara), *Motoc D. Mircea* (Lic. Oltenița) și *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Oltenița).

934. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{tg} 4x - 3 \operatorname{tg} 2x = 0$$

NECULAI TH. DONCIU

Ținând seamă de relația cunoscută:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

ecuația dată se poate scri:

$$\frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2x} - 3\operatorname{tg} 2x = 0$$

$$\overset{*}{**} \qquad \operatorname{tg} 2x\left(\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 2x} - 3\right) = 0$$

Această ecuație este echivalentă cu următoarele două:

(1) $$\operatorname{tg} 2x = 0$$

(2) $$\operatorname{tg} 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Prima are ca soluție:

(1′) $$x = \frac{k\pi}{2}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,)$$

Ecuația (2) ne dă:

(2′) $$x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, \qquad (k = 0, +1 + 2, \ldots,)$$

Soluții date de dnii: *Beral Haim* (Lic. Național, Iași), *Bujoreanu Vicențiu* (Bolgrad), *Codreș I. Florian* (bacalaureat), *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București), *Curchi Ioan*, *Dăscălescu Șt. Hristeche* (student, București), *Firoiu Ioan* (Lic., Arad), *Ghișoiu I. Petre* (Șc. Polit., București), *Jeba C-tin* (Șc. Polit,, Timișoara), *Lupescu Gh. C.* (Lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emilian* (student), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Parapeanu C. I.* (Lic., Brașov), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița), *Purdilă A.* (Lic., Brașov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța), *Savin C. Ion* (Șc. Milit. de Artilerie), *Velicescu N. Nicolae*, *Velicescu Gh. Titu* și *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanța).

Au mai soluționat problema d-nii: *Băcicov Boris* (Iași), *Cincilian Agop* (Balcic), *Constantinescu Mirceu* (București), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit. Timișoara) și *Stoicescu Ernest* (Lic. Matei-Basarab, București).

935. — *Să se găsească numărul de trei cifre* $\overline{abc}$, *știind că diferența dintre patratul acestui număr și patratul răsturnatului său este 87912.*

A. PURDILA

Conform enunțului avem:

$$(100a + 10b + c)^2 - (100c + 10b + a)^2 = 87912$$

$$\therefore \quad (101a + 20b + 101c) \cdot 99(a - c) = 87912$$

De aci deducem:

$$(a - c)[101(a + c) + 20b] = 888 = 2^3 \cdot 3 \cdot 37$$

$a - c$, nu poate fi de cât 1, 2, 3, 4, 6, 8.

Dacă $a - c = 1$, rezultă:

$$101(2c + 1) + 20b = 888,$$

care nu poate fi satisfăcută în numere întregi, primul membru fiind impar.

Dacă $a - c = 2$, rezultă:

$$101(2c + 2) + 20b = 444$$

$$\overset{*}{**} \qquad 101(c + 1) + 10b = 222,$$

care e satisfăcută luând:

$$c = 1, \qquad b = 2 \qquad \text{și deci} \qquad a = 3.$$

Avem astfel soluția 321.

Nu putem lua pentru $a - c$ valorile 3, 4, 6, 8, căci în acest caz ar trebui să avem respectiv:

$$101(2c + 3) + 20b = 296$$

$$101(2c + 4) + 20b = 222$$

$$101(2c + 6) + 20b = 148$$

$$101(2c + 8) + 20b = 111$$

Ținând seamă că a, b, c sunt cifre, nici una din acesta relații nu pot fi satisfăcute.

Singura soluție a problemei este deci numărul 321.

Soluții date de dnii: *Băcicov Boris* (student, Iași), *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic. Roman), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit. Timișoara), *Mehedinți D.* (Lic. Milit. Tg.-Mureș), *Mereuță Emilian* (Șc. Polit. București), *Mihăileanu N.* (Lic. Constanța), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Nicolaescu S.* (R.-Vâlcea), *Rusu D. C-tin* (Lic. Constanța), *Savin C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Weissmann M.* (Lic. Constanța).

936. — *Se cer numerele* $\overline{abcd}$ *știind că suma cifrelor lui este un număr egal cu rădăcina patrată a numărului de trei cifre* $\overline{d(a+1)c}$.

GEORGE P. BOERESCU

Conform enuțului avem:

$$11 \leqslant a + b + c + d \leqslant 31.$$

Cum suma $a + b + c + d$ este un număr prin cuprins între 11 și 31 inclusiv aceste numere, rezultă că această sumă poate fi unul din numerile:

$$11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31$$

Patratele acestor numere sunt:

(1) $$121,\ 169,\ 289,\ 361,\ 529,\ 841,\ 961$$

Numărul de trei cifre $\overline{d(a+1)c}$ trebuind să să fie printre numerile (1), putem ușor ceti în următorul tablou, care sunt cifrele d, a, c, cât trebuie să fie suma corespunzătoare $a + b + c + d$, și care este cifra b, care ar implini această condiție:

$d\,(a+1)\,c$	d	a	c	$\frac{a+b+}{c+d}$	b
121	1	1	1	11	8
169	1	5	9	13	—
289	2	7	9	17	—
361	3	5	1	19	—
529	5	1	9	23	8
841	8	3	1	29	—
961	9	5	1	31	—

Din acest tablou rezultă cu numai numerile 1811 și 1895, sunt soluții ale problemei.

Soluții date de d-nii: *Băcicov B.* (Iași), *Cincilian A.* (Balcic), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, București), *Crivăț I. Vladimir* (bacalaureat, București) *Dimitriu Gh. C-tin* (Lic. Național, Iași), *Grecu M. Cristache* (Lic. Oltenița), *Grossu Aurel* (Lic. Craiova), *Marineanu Traian* (student, București), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit. Timișoara), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N. N.* (Lic. Constanța), *Popa Gh. Ioan* (Lic. Oltenița), *Russu D. C-tin* (Lic. Constanța), *Savin C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, București), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit. Timișoara) și *Weismanu M.* (Lic. Constanța).

PROBLEME PROPUSE

967. — Se cer patratele de forma $a\,b\,c\,d$, astfel ca:

$$a\,b\,c\,d = N^2, \qquad d\,c\,b\,a = (3\,N)^2$$

MIRCEA CONSTANTINESCU

968. — Să se afle patratul de cinci cifre, știind că diferența între cifra a doua și a patra este egală cu câtul între aceste cifre, iar numărul format de cifrele a cincia și a doua este egal cu de șase ori suma cifrelor sale. Numărul format de cifrele întâia, a cincia si a treia este un multiplu de cinci, care divizat prin cinci dă drept cât numărul format de cifrele a cincia și a treia.

G. SAMBOTIN

969. — Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 - x\,y^2 - x^2\,y = 5 \\ x^4\,y^2 + x^2\,y^4 = 20 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

970 — Din discuția ecuații în x,

$$a\,x^2 - (a+3)\,x + 3 = y,$$

să se determine maximul sau minimul lui y, a fiind un parametru variabîl. Să se determine a astfel că minimul lui y să fie egal cu $-\frac{1}{8}$ și să se afle valoarea lui x corespunzătoare. Să se figureze curba reprezentativă a variații lui y, fără derivate.

N. ABRAMESCU

971. Se dau două cercuri concentrice de centru O, de raze r și R. Se dau alte două cercuri concentrice de centru O_1, de raze tot r și R. Se unește O cu un punct A al cercului O_1 de rază r. Se duce raza O B în cercul O de rază R, paralelă cu O_1 A și se unește O_1 cu B. Dreptele O A și O_1 B se întâlnesc în M și prin M se duce o paralelă M P la O B. Să se demonstreze că M P trece printr'un punct fix, când A se mișcă pe cercul O_1 de rază r.

Să se demonstreze că dacă păstrăm fixe centrele O și O_1 și modificăm razele r și R într'un același raport, punctul fix pe unde trece M P rămâne același. Să se cerceteze cazul particular $r = R$.

V. ALACI

971. — Un unghiu drept se rotește în jurul vârfului său A situat pe cercul O. Din M și N unde laturile sale taie a doua oară cercul, se iau pe aceste laturi lungimele M P = M P′ și N Q = N Q′ = A M (M P și N Q sunt luate în sensul de la A spre M și N).

Fie I și I′ mijloacele segmentelor P Q și P′ Q′. Se cere:

1°. Locul geometric al punctelor I și I′.

2°. Să se arate că segmentele de dreaptă P′ Q și P Q′ sunt de lungime constantă.

3°. Locul geometric al punctelor P, Q, P′ și Q′.

A. COMAN

INFORMAȚIUNI

BOLETIN MATEMATICO

Fondat în anul 1928. // Abonament anual: 400 Lei

BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

Fondat în anul 1930. // Abonament anual: 125 Lei

Director: **DR. B. I. BAIDAFF**

sunt cele mai importante publicațiuni periodice matematice din Sud América.

Se primesc abonamente pentru anul al IV (Ian. — Dec. 1931)

Abonamentele și corespondența se vor trimete la adresa

BOLETIN MATEMATICO

Belgrano 975, Buenos Aires, Rep. Argentina

De la Ianuarie 1928 până în Octomvrie 1930, s'au publicat articole și note de la Domnii:

F. Anguita, B. I. Baidaff, F. Cernuschi, Cl. C. Dassen, A. Garrigos și *J. Tschlek*, Buenos Aires (Rep. Argentina), *J. Hartmann*, La Plata (Rep. Argentina), *C. Dieulefait* și *E. Natale*, Rosario (Rep. Argentina), *O. Marquez*, Balta (Rep. Argentina), *M. A. Basoco* și *E. T. Bell*, Pasadona (California), *M. Krawtchouk* și *N. Kryloff*, Chiev (U. R. S. S.), *J. Gonzalez Perera*, S. Iosé (Uruguay), *B. Iekhowsky* Bordo (Francia), *W. Lewitzky*, Lemberg (Polonia), *O. J. Ramler*. Washington (Statele Unite), *J. Shohat*, Ann Arbor (Statele Unite), *D. M. J. Sommerville*, Wellington (N. Zelandia), *V. Thébault*, Le Mans (Francia), *O. Szász*, Frankfurt a. M. (Alemania), *G. Vivanti*, Milano (Italia), *J. R. Wilton* Adelaida (Sud Australia).

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu și-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol rebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și nsoțite de enunț.

Revista Universitară Matematică, de sub conducerea d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, a scos un volum omagial in memoria lui *Traian Lalescu*.

Acei dintre corespondenții noștrii care doresc să aibă acest volum în mod gratuit, se pot adresa d-lui Dr. *Rodolphe Raclis*, Alea Vulpache 21, Parcul Filipescu, București 3.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngri. jire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimete la cerere.

Abonamentul pe anul X-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL X. 15 FEBRUARIE 1931 No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 NICOLAE O ZAHARIA CATEVA PROPRIETATI IN LEGATURA CU UN TRIUNGHIA DREPTUNGHIC
2. NOTE MATEMATICE: 28
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 942, 944, 947
5. PROBLEME PROPUSE 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979
6. INFORMATIUNI
7. TABLE DE MATERII

TIMISOARA
Institut de arte grafice „Tipografia Românească“

Rugăm a ni se trimete de urgență costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișaaro.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 120 lei.
Anul III, broșat, 120 lei.
Anul IV, broșat, 120 lei.
Anul V, broșat, 120 lei.
Anul VI, broșat, 120 lei.
Anul VII, broșat, 120 lei.
Anul VIII, broșat, 120 lei.
Anul IX, broșat 120 lei.
Anul X, broșat 120 lei.

ANUL X — NO. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1931.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

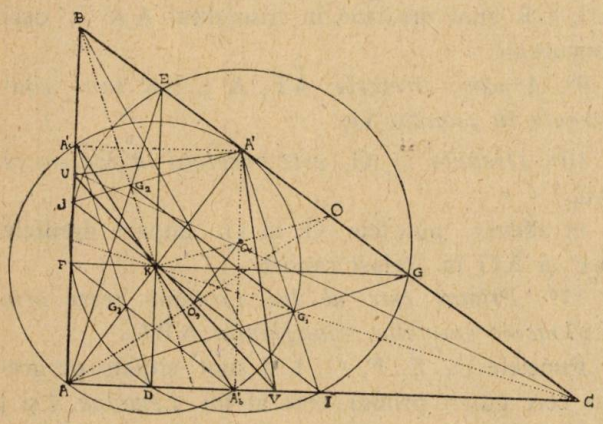
PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

CATEVA PROPRIETATI IN LEGATURA CU UN TRIUNGHIU DREPTUNGHIC

de NICOLAE O. ZAHARIA

Să considerăm tringhiul dreptunghic A B C (unghiul A de 90°). Fie A A′ înălțimea scoborîtă din A pe B C. Fie încă, A′ U și A′ V, bisectoarele unghiurilor drepte A A′ B și A A′ C, limitate la laturile tringhiului considerat.



1°. *Dreptele* B V *și* C U *concură pe înălțimea* A A′.

In adevăr, A′ U și A′ V fiind respectiv bisectoarele unghiurilor A A′ B și A A′ C, deducem:

$$\frac{UA}{UB}=\frac{AA'}{BA'} \quad \text{și} \quad \frac{VC}{VA}=\frac{A'C}{AA'}$$

Pentru ca A′ U, A′ V și A A′ să fie concurente, trebue se avem:

$$\frac{UA}{UB}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{VC}{VA}=-1$$

Introducând aici, valorile rapoartelor $\frac{UA}{UB}$ și $\frac{VC}{VA}$ aflate mai sus, se obține:

$$(1)\quad \frac{UA}{UB}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{VC}{VA}=\frac{AA'}{BA'}\cdot\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{CA'}{AA'}=-1$$

2°. Bazându-ne pe proprietatea enunțată mai sus, putem demonstra că: *Intr'un triunghiu dreptunghic, înălțimea ce pleacă din unghiul drept este în acelaș timp simediană:*

Insemnăm cu *a, b, c,* ipotenuza, și cele două catete opuse vârfurilor B și C. — In articolul *„Proprietăți în legătură cu un triunghiu dreptunghic"* din R. M. T. anul I No. 8, s'a arătat că:

$$AA'=\frac{b.c}{a}\ ; \qquad BA'=\frac{c^2}{a}\ ;$$

analog avem:

$$CA'=\frac{b^2}{a}$$

așa că:

$$\frac{AA'}{BA'}=\frac{b}{c}\ ; \qquad \frac{CA'}{AA'}=\frac{b}{c}$$

Introducând valorile acestor rapoarte în relația (1) obținem:

$$\frac{A'B}{CA'}=\frac{c^2}{b^2},$$

ceeace ne arată că punctul A′ este piciorul simedianei care pleacă din A.

3°. *Catetele triunghiului* A′ U V *sunt proporționale cu segmentele determinate de bisectoarea unghiului drept, pe ipotenuză.*

Tot în articolul mai sus citat se stabilesc relațiile:

$$A'U=\frac{b\,c^2\sqrt{2}}{a(b+c)}\ ; \qquad A'V=\frac{b^2\,c\sqrt{2}}{a(b+c)}\ ;$$

cari prin împărțire ne dau:

$$\frac{A'U}{A'V} = \frac{b\,c^2\sqrt{2}}{a(b+c)} : \frac{b^2\,c\sqrt{2}}{a(b+c)} = \frac{c}{b}$$

A_1 fiind piciorul bisectoarei, se ştie că avem:

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}$$

Rezultă:

$$\overset{*}{**} \qquad \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{A'U}{A'V};$$

4°. Fie K punctul lui *Lemoine*. — Prin K se duc paralele DE, FG, IJ respectiv la laturile AB, AC, BC.

Intre segmentele determinate pe ipotenuză, avem relaţia:

$$EG = BE + CG$$

In adevăr, avem:

$$\frac{BE}{c^2} = \frac{EG}{a^2} = \frac{CG}{b^2}$$

(„Exercices de Géométrie" par F. G. M. pag. 1186).

sau:

$$\frac{EG}{a^2} = \frac{EB + CG}{b^2 + c^2}$$

Cum însă avem:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

rezultă:

$$EG = ED + CG$$

5°. *Dreptele* BI *şi* CJ *sunt mediane în triunghiul* ABC.

Tot în locul citat mai sus, se găsesc relaţiile analoage:

$$\frac{CI}{a^2} = \frac{ID}{b^2} = \frac{DA}{c^2} \quad \text{şi} \quad \frac{AF}{b^2} = \frac{FJ}{c^2} = \frac{JB}{a^2};$$

Din care deducem:

$$\frac{CI}{a^2} = \frac{ID + DA}{b^2 + c^2}; \qquad \frac{JB}{a^2} = \frac{AF + FJ}{b^2 + c^2}$$

sau:

$\overset{*}{**}$ $CI = ID + DA = IA$; $\overset{*}{**}$ $JB = AF + FJ = AJ$,

ceeace ne arată că I şi J sunt respectiv mijloacele catetelor AC şi AB, deci dreptele BI şi CJ sunt mediane.

6°. *Punctul* K *al lui Lemoine se confundă cu mijlocul înălţimii* AA'.

Proprietatea rezultă din precedenta. In adevăr, dreapta IJ fiind paralelă la ipotenuză prin construcţie, şi I aflându-se la mijlocul lui AC, evident că trece prin mijlocul înălţimei AA'. Ori — prin construcţie — dreapta IJ trece prin K, deci K este mijlocul dreptei AA'.

7°. *Punctele* G *şi* E *sunt respectiv mijloacele segmentelor* A'C *şi* A'B.

Se deduce uşor, K fiind mijlocul înălţimii AA' iar dreptele KG şi KE fiind respectiv paralele la catetele AC şi AB.

8°. *Dreptele* AG, A'I, CK *sunt concurente într'un punct* G_1.

I fiind mijlocul dreptei AC, K mijlocul dreptei AA' iar G mijlocul dreptei A'C, dreptele AG, A'I, CK sunt mediane în triunghiul AA'C, deci concurente.

9°. *Analog, dreptele* AE, A'J, BK *sunt concurente în punctul* G_2.

10°. *Dreapta* G_1G_2 *este paralelă la ipotenuza* BC.

In adevăr, punctele G_1 şi G_2 împart dreptele AE şi AG în acelaşi raport.

11°. *Primul cerc al lui Lemoine trece prin mijloacele catetelor triunghiului* ABC.

Punctele D, E, F, G, I, J sunt situate pe acelaş cerc numit primul cerc al lui *Lemoine*. I şi J fiind mijloacele catetelor AC şi AB, rezultă imediat, proprietatea enunţată.

12°. *Cele 6 puncte de pe laturile triunghiului, cari determină al doilea cerc al lui Lemoine, se reduc în cazul triunghiului dreptunghic la următoarele patru puncte:* A, A', A'_c, A'_b, (A'_c şi A'_b fiind proecţiile lui A' pe AB şi AC).

AA' este antiparalela relativă la ambele catete. Antiparalela relativă la ipotenuză este dreapta $A'_cA'_b$. Deoarece avem însă unghiurile $\widehat{KAA'_c} = \widehat{KA'_cA}$; $\widehat{KA'_bA} = \widehat{KAA'_b}$, prin construcţia de antiparalele, rezultă că cele patru triunghiuri: KAA'_c, KAA'_b, $KA'A'_c$, $KA'A'_b$ sunt isoscele şi două câte două egale iar: $A'A'_c \parallel AA'_b$ şi $A'A'_b \parallel$

$A'_c A$, rezultă că dreptele $A' A'_c$ şi $A' A'_b$ sunt perpendiculare pe catetele (A B, A C) triunghiului, deci punctele A'_c şi A'_b sunt proecţiile punctului A' pe B A şi C A.

13°. *Distanţa* $O_9 O_k$ *dintre centrul cercului lui Euler şi centrul cercului lui Lemoine (primul cerc) este paralelă la* A' A *şi egală cu* $\frac{1}{4}$ *din lungimea ei.*

O_9 se află la mijlocul dreptei A O (O centrul cercului circumscris) iar O_k la mijlocul dreptei K O. In triunghiul A O K, dreapta $O_9 O_k$, unind mijloacele laturilor A O şi K O, este paralelă la A K şi egală cu $\frac{1}{2}$ din lungimea ei. Rezultă:

$$O_9 O_k = \frac{1}{4} A A'.$$

14°. *Dreptele* $A'_c D$, $A'_b F$, A K *sunt concurente în* G_3,

Punctele D şi F sunt mijloacele dreptelor $A A'_b$, $A A'_c$. Punctul K, este deasemenea mijlocul dreptei $A'_b A'_c$. Rezultă că dreptele $A'_c D$, $A'_b F$ şi A K sunt mediane în triunghiul $A A'_c A'_b$, deci concurente.

15°. *Triunghiurile* A B C *şi* $G_1 G_2 G_3$ *sunt omologice.*

16°. Fie G, centrul de greutate al triunghiului A B C. Avem:

$$O G = \frac{a}{6}$$

17°. Dreptele O J, A' V concură pe bisectoarea unghiului A.

NOTE MATEMATICE

28. — *Asupra problemei 820.*

Imi propun să dau acestei probleme, o soluţie diferită de aceea din *R. M. T.* anul X, No. 9, pag. 107.

Totul se rezumă în stabilirea identităţii:

$$\frac{S^2 - r^2 r_a^2}{b c r_a^2} = \frac{p - a}{p} \cos A$$

pe o cale, pe care o socot mai simplă.

Insemnăm primul membru cu E, ţinem seamă de relaţiile:

$$r = \frac{S}{p}; \quad r_a = \frac{S}{p - a} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

şi scriem:

$$E = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}{\frac{b c}{(p - a)^2}}$$

Ţinem seamă încă de relaţiile:

$$1 - \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} = \frac{\cos A}{\cos^2 \frac{A}{2}}; \quad \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p (p - a)}{b c}$$

şi scriem:

$$E = \frac{p - a}{p} \cos A$$

MIHAILEANU N.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVI, No. 5, Ianuarie 1931.

Câteva clase de polinoame cu rădăcinele reale; polinoamele lui *Hermite*, de *Alexandru Niculescu*. Câteva inegalităţi în legătura cu indicatorii numerici, de *Ioan B. Florescu*.

2. *Bulletin Scientifique de l'Ecole Polytechnique de Timişoara*, Tome 3, Fasc. 3—4. Cuprinde: Sur les zéros de certains polynomes, par *V. Vâlcovici*. Géométrie analytique des polygones et des polyèdres convexes, par *V. Alaci*. Sur la moyenne des fonctions paraboliques, par *Ernest Abason*. Quelques observations sur l'étude des courbes algébriques, par *G. Borneanu*. Sur le groupement des écarts accidentels de mesure, par *C. Teodorescu*. Aplicarea funcţiunilor analitice la studiul câmpurilor laplaciene plane, de *Remus Răduleţ*. Studiu asupra calculului grafic al eforturilor in ferma *Polonceau* cu trei biele şi cu şapte biele, de *A' Toussaint*. Über die bituminösen Schiefer von Anina, von *I. Cristescu* und *A. Sandor*. Der Einfluss der Entschwefelung auf die Festigkeitseigenschaften des Gusseisens, von *Stefan Nadaşan*. Intervenţia Statului pentru infrânarea cametei şi modalităţi de intervenţie pentru micşorarea dobânzei, de *Gh. D. Lambrino*.

3. *Ernest Abason*. Sur le théorème des accroissements finis et le théorème de la moyenne. (Extrait du Bulletin de l'Académie Roumaine).

PROBLEME REZOLVATE

942. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sin 7t - \sin 5t + \sin 3t - \sin t =$$

$$64 \operatorname{tg} t \prod_{k=1}^{7} \left(\cos t - \cos \frac{k \pi}{8} \right)$$

V. ALACI

Notând cu E primul membru al identității, observăm că putem scri succesiv, transformând în produse diferențele de sinusuri și sumele de cosinuri:

$$E = (\sin 7t - \sin 5t) + (\sin 3t - \sin t) =$$

$$2\sin t \cos 6t + 2\sin t \cos 2t = 2\sin t(\cos 6t + \cos 2t) =$$

$$4\sin t \cos 2t \cos 4t = 4\sin t(2\cos^2 t - 1) \times$$

$$(2\cos^2 2t - 1) = 16\sin t\left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right) \times$$

$$\left(\cos^2 2t - \frac{1}{2}\right) = 16\sin t\left(\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times$$

$$\left(\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos 2t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos 2t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$64\sin t\left(\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times$$

$$\left(\cos^2 t - \frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\left(\cos^2 t - \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)$$

Cum:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{2\pi}{8} = -\cos\frac{6\pi}{8},$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} = \cos^2\frac{\pi}{8}, \quad \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos^2\frac{3\pi}{8},$$

putem scri încă:

$$E = 64\,\mathrm{tg}\,t \cdot \cos t \cdot \left(\cos t - \cos\frac{2\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{6\pi}{8}\right) \times$$

$$\left(\cos t - \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{7\pi}{8}\right) \times$$

$$\left(\cos t - \frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{5\pi}{8}\right) =$$

$$64\,\mathrm{tg}\,t \cdot \left(\cos t - \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{2\pi}{8}\right) \times$$

$$\left(\cos t - \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{4\pi}{8}\right) \times$$

$$\left(\cos t - \cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{6\pi}{8}\right)\left(\cos t - \cos\frac{7\pi}{8}\right)$$

sau încă:

$$E = 64\,\mathrm{tg}\,t \prod_{k=1}^{7}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{8}\right)$$

Avem astfel stabilită, identitatea dată.

Soluții analoage, date de d-nii: *Jeba C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (student, București), și *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București).

Altă soluție. In articolul: *„Sume trigonometrice transformate în produse"* din „R. M. T." anul VII, No. 9, pag. 144, autorul problemei de mai sus, stabilește următoarea identitate:

$$\sin t - \sin 3t + \sin 5t - \ldots +$$

$$(-1)^p \sin(2p+1)t =$$

$$(-1)^p 2^{2p}\,\mathrm{tg}\,t \prod_{k=1}^{2p+1}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{2p+2}\right)$$

In cazul particular $p = 3$, obținem după ce schimbăm semnele ambilor membrii:

$$\sin 7t - \sin 5t + \sin 3t - \sin t =$$

$$64\,\mathrm{tg}\,t \prod_{k=1}^{7}\left(\cos t - \cos\frac{k\pi}{8}\right),$$

adică tocmai identitatea dată.

Au soluționat în acest mod problema, d-nii: *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara). *Mihăileanu N.* (Lic, Constanța), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanța) și *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara).

944. — *Autobuzul de pe linia „Obor-Posta Centrală din București pleacă de la „Obor" cu un număr oarecare de persoane, făcând pe taxator să încaseze suma de 30 lei, costul biletului fiind același pe orice porțiune de linie. La fiecare stație se dau jos două persoane și se urcă trei.*

Se cere numărul persoanelor cu care a plecat autobuzul, știind că a sosit la poștă cu 12 persoane, iar taxatorul are în geantă 156 lei.

NICOLAE ȘI TITU VELICESCU

Soluție aritmetică. 30 lei este suma încasată de taxator la *Obor* și cum 156 lei este suma totală ce o are taxatorul în geantă la *Posta Centrală*, rezultă că:

$$156 - 30 = 126 \text{ lei},$$

este suma incasată de taxator în stațiile intermediare.

Dacă în fiecare stație intermediară s'ar fi urcat câte o persoană, nu câte trei, încasatorul ar fi luat

$$\frac{126}{3} = 42 \text{ lei},$$

în timpul parcursului.

Pe de altă parte, prin faptul că la fiecare staţie se dau jos două persoane şi se urcă trei, este ca şi cum (fără a se da cineva jos), s'ar urca încă o persoană, ceiace n'ar schimba numărul persoanelor cu care s'ar ajunge la *Posta Centrală*. Cum numărul persoanelor este 12, iar suma încasată total prin urcarea numai a câte unei persoane în staţiile intermediare ar fi $72 = 30 + 42$ rezultă că:

$$72 : 12 = 6 \text{ lei},$$

este costul unui bilet. In staţia *Obor* încasându-se 30 lei şi preţul unui bilet fiind 6 lei, rezultă uşor că numărul persoanelor cu care a pornit autobuzul este 5.

Soluţie algebrică. Fie x numărul persoanelor urcate în staţia *Obor*, y preţul unui bilet şi z numărul staţiilor intermediare. Conform enunţului putem scri:

$$(1) \quad \begin{cases} x\,y = 30 \\ x + z = 12 \\ (x + 3z)\,y = 156 \end{cases}$$

Scăzând prima ecuaţie din ultima şi simplificând cu 3, obţinem:

$$z\,y = 42$$

Adunând această ecuaţie cu prima din sistemul (1), obţinem:

$$(2) \quad y\,(x + z) = 72$$

Cum

$$x + y = 12,$$

rezultă din (2):

$$y = 6$$

şi deci $x = 5$. Autobozul a plecat deci cu 5 persoane.

Soluţii date de d-nii: *Beral Haim* (Lic. Naţional, Iaşi), *Chivu S. I.* (Lic. Milit., Craiova), *Constantinescu P. Mircea* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Crivăţ I. Vladimir* (bacalaureat, Bucureşti), *Dăcsălescu I. Hristache* (student, Bucureşti), *Filipovici Jiva* (student, Bucureşti), *Lascu C. Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* (Lic., Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Marşieu Teodor* (Şc. Polit, Timişoara), *Mehedinţi D.* (Lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanţa), *Parepeanu I.* (Lic., Braşov), *Pascaru I.* (Lic. Naţional), *Pisai Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă A.* (Lic., Braşov), *Rusu D. C-tin* (Lic., Constanţa), *Stoicescu I. Ernest* (Lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Vonica C. Ioan* (Şc. Milit., Timişoara) *Weissmann Mauriciu* (Lic., Constanţa) şi *Derenbaum M.*

947. — *Suma a şase termeni întregi pozitivi în progresie aritmetică este 60. Să se afle acei termeni.*

Suma a patru termeni întregi pozitivi în progresie geometrică este 45. Să se afle acei termeni.

IOAN CURCHI

1. Fie a primul termen şi r raţia progresiei aritmetice.

Conform enunţului avem:

$$a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + (a + 4r) + (a + 5r) = 60$$

$$6a + 15r = 60$$

Deci:

$$a = \frac{5(4 - r)}{2}$$

Cum a este întreg pozitiv, nu putem lua de cât $r = 2$.

Atunci, $a = 5$ şi progresia aritmetică cerută este:

$$\div 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 .$$

2. Fie a primul termen şi q raţia progresiei geometrice.

Conform enunţului avem:

$$a + aq + aq^2 + aq^3 = 45$$

$$1 + q + q^2 + q^3 = \frac{45}{a}$$

Primul membru fiind un întreg pozitiv diferit de 1, rezultă că nu putem lua de cât;

$$a = 1,\ 3,\ 5,\ 9.$$

Dacă $a = 1$, ecuaţia:

$$1 + q + q^2 + q^3 = 45,$$

nu poate fi satisfăcută în numere întregi.

Dacă $a = 3$, atunci avem ecuaţia:

$$1 + q + q^2 + q^3 = 15$$

care în numere întregi, ne dă $q = 2$.

Dacă $a = 5$, ecuaţia:

$$1+q+q^2+q^3=9,$$

nu poate fi satisfăcută în numere întregi.

Dacă $a=9$, ecuația:

$$1+q+q^2+q^3=5,$$

nu poate fi satisfăcută în numere întregi.

Așa dar singura soluție este $a=3$, $q=2$ și progresia geometrică cerută este:

$$\div 3:6:12:24.$$

Soluții date de d-nii: *Beral Heim* (Lic. Național, Iași), *Chivu S. I.* (Lic. Milit., Craiova), *Constantinescu Mircea* (Lic. Matei-Basarab, București), *Crivăț I. Vladimir* (București), *Grossu Aurel* (Lic. Carol, Craiova), *Lascu C. Ioan* (Lic. Milit., Craiova), *Marineanu Traian* (student, București), *Marșieu Teodor* (Șc. Polit., Timișoara), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihăileanu N.* (Lic., Constanța), *Motoc D. M.* (Lic., Oltenița), *Parepeanu C. I.* (Lic., Brașov), *Pascaru I.* (Lic. Național, Iași), *Pisai I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Popa Gh. Ioan* (Lic., Oltenița), *Purdilă Anton* (Lic., Brașov), *Russu D. Ctin* (Lic., Constanța), *Stoicescu Ernest* (Lic. Matei-Basarab, București), *Vonica C. Ioan* (Șc. Milit. de Artilerie), *Weissmann Mauriciu* (Lic. Constanța). și *Derenbaum M.*

PROBLEME PROPUSE

972. — Să se afle patratul perfect de patru cifre distincte, astfel că schimbând ordinea cifrelor de rang nepereche să ne dea tot un patrat perfect, care scăzut din primul ne dă un număr în care cifra a doua și a treia sunt cifrele întâia și a doua a primului patrat, iar celelalte sunt tot distincte.

STAVRACHE TEODORESCU

973. — Se cere cubul perfect de forma $a\,b\,c\,b\,c\,b\,a$ în care numărul format din cifrele întâia, a doua, a patra și a șasea e un cub, iar suma cifrelor cubului cerut este tot un un cub.

EMILIAN MEREUTA

974. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a\,y\,z \\ y(x+y+z)=b\,z\,x \\ z(x+y+z)=c\,x\,y \end{cases}$$

NICOLAE MIHAILEANU

975. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y=3z \\ x^2+y^2=5z^2 \\ x^3+y^3=80-z^3 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

976. — Fie A′, B′, C′ picioarele înălțimelor; A_1, B_1, C_1 picioarele medianelor și φ, φ_a punctele lui *Feuerbach* corespunzătoare unghiului A ale unui triunghiu A B C. Dacă a, b, c și $2p$ sunt laturile și perimetrul aceluiași triunghiu, să se demonstreze că avem:

$$a\frac{\varphi A'}{\varphi A_1}+b\frac{\varphi B'}{\varphi B_1}+c\frac{\varphi C'}{\varphi C_1}=2p$$

$$a\frac{\varphi_a A'}{\varphi_a A_1}+b\frac{\varphi_a B'}{\varphi_b B_1}+c\frac{\varphi_c C'}{\varphi_c C_1}=2(p+a)$$

COL. GH. BUICLIU

977. — Dacă în triunghiul isoscel A B C (A B = A C = l) există relația:

$$6\cos^2 B=1$$

atunci avem și:

1°. $$CD=BE=\frac{l}{3}$$

(unde D și E sunt picioarele înălțimelor duse din B și C), și reciproc.

2°. Să se indice mijlocul de a construi triunghiul A B C când se cunoaște lungimea bazei $BC=a$.

3°. Paralele duse din D și E la A B și A C se taie în A′, aceleași paralele taie paralele duse din A la B D și C E în B′ și C′. Triunghiurile A B C și A′ B′ C′ sunt asemenea.

A. COMAN

978. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{\sin 3\alpha_1\ \sin^3\alpha-\sin 3\alpha\ \sin^3\alpha_1}{3\sin\alpha\ \sin\alpha_1}=$$

$$\sin(2\alpha_1+\alpha)\sin\alpha-\sin(\alpha_1+2\alpha)\sin\alpha_1$$

Să se verifice în cazul, $\alpha=30^0$, $\alpha_1=45^0$.

V. ALACI

979. — Să se arate că:

$$2\cos 2^n a=$$

$$\frac{\sec a\sec(2^n+1)a+\sec(2^n+1)a\sec(2^{n+1}+1)a+\ldots}{\sec a\sec(2^{n+1}+1)a+\sec(2^{n+1}+1)a\sec(2^{n+2}+1)a+\ldots}$$

ION MARGINEANU

TABLA DE MATERII[1]

I. ARTICOLE

a) Algebră

Col. Gh. Buicliu	Un caz de rezolvare a ecuației de gradul al patrulea . .	13
C. Berdan	Un sistem de ecuațiuni . . .	25
I. Murăroiu	Contribuțiuni la studiul ecuației de gradul al 2-lea .	73
Căp. I. Linteș	Câteva probleme deduse cu ajutorul progresiunilor aritmetice	97

b) Geometrie

A. V. Niculescu	Reciproca teoremei lui Pappus	51
C. Coșniță	Câteva proprietăți în legătură cu transversalele în triunghiu	61
C. Coșniță	Relații metrice deduse cu ajutorul înversiunei	121
N. O. Zaharia	Câteva proprietăți în legătură cu un triunghiu dreptunghic	133

c) Trigonometrie

H. P. Ionescu	Relațiuni trigonometrice . .	37
I. Mărgineanu	Asupra variației funcțiunilor goniometrice	85

d) Analiză

V. Claudian	Câteva probleme de calcul diferențial	109

Diverse

* * *	O solemnitate la școala Politechnică din Timișoara . .	3
* * *	Solemnitatea dezvelirei bustului lui Traian Lalescu . .	49

II. NOTE MATEMATICE[2]

1. **Căp. I. Linteș**	Asupra problemei 784 . . .	7
2. **Căp. I. Linteș**	Asupra notei 22 din R. M. T. IX. (pag. 99)	7
3. **H. P. Ionescu**	Generalizarea problemei 819 .	7
6. **H. P. Ionescu**	Asupra unei note	14
7. **I. Murăroiu**	Asupra unor chestiuni . . .	14
8. **I. Murăroiu**	Asupra problemei 728 . . .	26
6. **C. Coșniță**	Generalizarea problemei 761 din R. M. T.	28
10. **I. Gh. Popa**	Asupra problemei 819 . . .	40
11. **B. Bâcicov**	Elementele unui triunghiu în funcție de razele cercurilor exinscrise	41
12. **H. P. Ionescu**	Generalizarea exercițiului 46 — G. M. XXXIII	54
13. **C. Coșniță**	Asupra cevienelor în triunghuri	54
14. **D. Secăroiu**	Asupra problemei 756 . . .	64
15. **H. P. Ionescu-Biss**	Asupra problemei 3801 . . .	65
16. **B. Bâcicov**	Asupra inegalităților între elementele unui triunghiu .	76
17. **I. A. Dimitriu**	Asupra problemei 829 . . .	78
18. **Col. Gh. Buicliu**	Soluția geometrică a problemei 208	87
19. **Georgescu-Roegen**	Asupra triunghiurilor cu laturile în progresie geometrică	89
20. **H. P. Ionescu**	Asupra problemei 842 . . .	99
21. **T. Marineanu**	Asupra problemei 819 . . .	99
22. **T. Marineanu**	Asupra problemei 888 . . .	113
23. **Col. Gh. Buicliu**	O nouă soluție a problemei 869	113
24. **I. Gh. Popa**	Asupra triunghiurilor în care avem $a = h_a$	114
25. **Col. Gh. Buicliu**	Problema 662	124
26. **P. I. Ghișoiu**	O problemă	124
27. **R. O. Zaharia**	Asupra însemnătății filosofice a Elementelor lui Euclid .	125
28. **Mihaileanu N.**	Asupra problemei 820 . . .	135

III. BIBLIOGRAFII

E. Abason	Memoriu de titluri, lucrări și activitate didactică . . .	28
E. Abason	Constributions à l'étude du coéfficient de déformation des fonctions non sinusoïdales	28
E. Abason	Sur le théorème des accroissements finis et le théorème de la moyenne	135
N. Abramescu	Lecțiuni de Trigonometrie plană pentru cl. VI.	115
N. Abramescu	Lecțiuni de Geometrie pură și infinitizemală	115
V. Alaci	Une classe de fonctions discontinues de première espèce	17
R. Bădescu	Sur une équation fonctionelle	44
G. Bouligand	Notions sur la géometrie reglée et sur la théorie du complexe quadratique . .	44
Buletinul Societății de Științe din Cluj		43
Bulletin de Mathématiques et de Phisique pures et appliquées de l'Ecole Politechnique de Bucarest		17
Bulletin Scientifique de l'Ecole polytechnique de Timișoara		135

[1]) Mulțumiri călduroase d-lui *Col. Gh. Buicliu* pentru întocmirea tablei de materii. (Nota Redacției)

[2]) La numărătoarea notelor s'a făcut o eroare cu începere de la pagina 14 unde s'a numerotat cu 6 în loc de 4 nota de la acea pagină.

Ing. R. Criveanu și I. B. Florescu	Probleme de Matematici pentru bacalaureat, după programa analitică actualmente în vigoare	44
Gazeta Matematică	8, 16, 28, 43, 65, 90, 102, 114, 121	135
D. Georgescu	Culegere de probleme pentru bacalaureat și cursul superior de liceu	44
Mathematica		16
M. d'Ocagne	Hommes, Choses de sciences	115
T. Popovici	Sur certains polynomes minisants	65
T Popovici	Remarque sur les polygones de meilleure approximation	65
T. Popovici	Sur les indicateurs . . .	65
T. Popovici	Sur les fonctions convexes d'une variable réelle . . .	65
Revista Matematică Universitară		17
V. Vâlcovici	Généralisation du théorème des moments des quantités de mouvement	8
V. Vâlcovici	Généralisation du théorème de l'énergie	8
V. Vâlcovici	Sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de certains solides . . .	17
V. Vâlcovici	Sur les zeros de certains polynomes	65

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN

Examenul de matematici generale. Anul pregătitor. Seziunea Iunie 1930. (Lucrare scrisă) . . 65

Examenul de matematici generale. Anul pregătitor. Seziunea Septembrie 1930 90

Școala Politecnică din Timișoara. Examenul de intrare în anul pregătitor, Octombrie 1930 101

V. INOFRMAȚIUNI

1. Autorii problemelor 946 și 947 115
2. Referitor la scrisoarea unui grup de corespondenți 115

VI. PROBLEME REZOLVATE ȘI PROPUSE

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă și cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul X. Problemelor care nu au nimic publicat în coloana 4), încă nu li s-a publicat soluția.

1).	2)	3).	4).
42	94	I.	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
91	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	187	„	
109	14	II.	
110	14	„	
114	30	II.	
120	30	„	
124	30	„	
140	62	„	
141	62	„	
150	78	„	
154	94	„	
157	94	„	
161	94	„	
162	94	„	
163	94	„	
164	94	II.	
165	94	„	
173	110	„	79
174	110	„	
175	110	„	
176	126	„	80
178	126	„	81
184	126	„	82
185	126	„	84
186	142	„	84
191	142	„	
194	142	„	
195	142	III.	
198	158	„	
199	158	„	
206	174	„	
207	174	„	
208	174	„	
212	174	„	
213	174	„	
214	174	„	
217	186	„	
230	14	„	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	„	
248	46	„	
253	62	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	78	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	126	„	
299	142	„	
310	174	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	
334	14	IV.	
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	IV.	
390	126	„	
393	126	„	
401	158	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V.	
440	30	„	
445	46	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
485	110	„	
489	126	„	
507	159	„	
514	174	„	
516	174	„	
518	190	„	
519	190	„	
524	190	„	
527	14	VI.	
528	14	„	
531	14	„	
	122	IX.	
535	30	VI.	
537	30	„	
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
544	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
592	142	„	
	86	VII.	
606	174	VI.	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII.	

1).	2).	3).	4).
628	38	VII.	
	118	„	
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	
646	72	„	
649	86	„	
652	86	„	115
653*bis*	102	„	
655	102	„	115
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
662	118	„	116
667	134	„	
668	134	„	
673	134	„	8
695	190	„	
746	94	VIII.	
752	109	„	91
753	110	„	
754	110	„	56
759[1]	126	„	57
762	126	„	
764	126	„	
766	126	„	
769	142	„	
770	142	„	9
779	142	„	
777	158	„	
779	158	„	
780	174	„	17
782	174	„	
787	190	„	
	12	IX.	
794	190	VIII.	
800	12	IX.	
805	24	„	102
811	36	„	66
812	36	„	
813	36	„	
815	36	„	
816	36	„	
818	48	„	66
819	48	„	
820	48	„	

[1]). Publicată și la pag. 22 vol. IX.

1).	2).	3).	4).
821	48	IX.	
823	48	„	
826	60	„	
827	60	„	18
828	60	„	28
832	60	„	
835	72	„	44
836	72	„	67
837	72	„	29
838	72	„	30
840	72	„	9
843	84	„	19
846	84	„	31
847	84	„	
850	96	„	9
851	96	„	
852	96	„	20
853	96	„	
854	96	„	10
855	96	„	21
856	96	„	22
857	96	„	10
858	108	„	
859	108	„	31
860	108	„	
861	108	„	32
862	108	„	33
863	108	„	
864	108	„	45
865	108	„	23
866	122	„	11
867	122	„	
868	122	„	34
869	122	„	103
870	122	„	34
871	122	„	35
872	134	„	45
873	134	„	35
874	134	„	104
875	134	„	46
876	134	„	46
877	134	„	47
878	134	„	57
879	144	„	
880	144	„	58
881	144	„	67
882	144	„	
883	144	„	68
884	144	„	58

1).	2).	3).	4).
885	144	„	59
886	144	„	60
887	12	X.	69
888	12	„	69
889	12	„	
890	12	„	
891	12	„	69
892	12	„	70
893	12	„	
894	12	„	71
895	24	„	71
896	24	„	92
897	24	„	92
898	24	„	
899	24	„	
900	24	„	93
901	24	„	93
902	24	„	
903	24	„	94
904	24	„	95
905	36	„	105
906	36	„	117
907	36	„	
908	36	„	
906	36	„	106
910	36	„	
911	36	„	117
912	36	„	128
913	48	„	
914	48	„	
915	48	„	
	120	„	
916	48	„	
917	48	„	
918	48	„	
919	48	„	106
920	48	„	107
921	60	„	128
922	60	„	128
923	60	„	
924	60	„	
925	60	„	
926	60	„	119
927	72	„	128
928	72	„	
929	72	„	
930	72	„	
931	72	„	129
932	72	„	130

1).	2).	3).	4).
933	72	X.	
934	72	„	130
935	84	„	131
936	84	„	131
937	84	„	
938	84	„	
939	84	„	
940	84	„	
941	84	„	
942	84	„	135
943	96	„	
944	96	„	135
945	96	„	
946	96	„	
947	96	„	135
948	96	„	
949	96	„	
950	96	„	
951	107	„	
952	107	„	
	120	„	
953	107	„	
954	108	„	
955	108	„	
956	108	„	
957	108	„	
958	108	„	
959	108	„	
960	120	„	
961	120	„	
962	120	„	
963	120	„	
964	120	„	
965	120	„	
966	120	„	
967	132	„	
968	132	„	
969	132	„	
970	132	„	
971	132	„	
972	138	„	
973	138	„	
974	138	„	
975	138	„	
976	138	„	
977	138	„	
978	138	„	
979	138	„	

TABLOUL NUMELOR[1])

Abason E., 1, 14, 17, 28, 43, 83, 135.
Abramescu N., 1, 16, 65, 115, 124, 132.
Adam M., 79, 81.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Agapescu M. N., 83.
Agronomof N., 16, 65.
Alaci V., 1, 3, 5, 6, 8, 12, 13, 17, 22, 24, 25, 26, 32, 34, 36, 37, 46, 48, 49, 50, 58, 60, 61, 70, 72, 73, 82, 84, 86, 92, 96, 97, 108, 109, 115, 117, 120, 121, 128, 129, 132, 135, 138.
Albeaţă N. E., 117.
Aldea N. N., 67, 79, 116, 117.
Alembert d'., 126.
Alexandrescu Elena, 1.
Alexandrescu N., 10, 11, 12, 19, 23, 28, 34, 35, 47, 69, 70, 71.
Almăjan C. P., 19, 28, 29. 57, 67, 92.
Al-Nizin, 126.
Amărăscu G., 79.
Andrescu A., 93, 94.
Angelescu A., 1, 16.
Angelescu N. Tr., 79, 80, 83.
Angheluţă Th., 1, 16, 25.
Antonescu C. A., 12, 23, 34, 45, 68, 72.
Antonescu P. A., 93, 95, 118, 127.
Antoniu G. I., 79, 83.
Antoniu S. I., 56.
Appel R., 81.
Arcadian P. N., 79.
Ardeleanu N., 50.
Arghir I., 1.
Arghiriadi E., 90.
Aristot, 125.
Arsene A., 79, 116, 117.
Atanasiu I. D., 79, 80, 83.
Aubel Van, 122.

Băcanu I., 10, 19, 21, 45.
Bâcicov P. B., 10, 11, 23, 34, 35, 36, 43, 45, 46, 47, 58, 59, 60, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 93, 94, 95, 117, 118, 127, 128, 129 130, 131, 132.
Bâcicov C., 12.
Bâcivov P. V., 45, 127, 128, 129, 130.
Bădescu R., 44.
Bădulescu V., 1.
Baire, 16.
Balaban Gh., 1.
Balaban I. Gh., 116, 117.
Balasz D., 1.
Băleanu N., 130.
Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1.
Barbilian D. 17, 28.
Barbu A. D., 10.
Bărglăzan N. A., 80, 83.
Baron C., 1.
Beju O. T., 81, 83.
Beldie N. D., 79, 83.
Beral H., 130, 131, 137, 138.
Bercovici A. E., 79, 81.
Berdan C., 21, 25, 79, 80, 81, 83.
Beschea G. N., 79, 80.
Bidoianu I. A., 10, 19, 45. 67.
Biernacki M., 16.
Blaşian V., 1.
Blumenfeld M. D., 79, 83.
Bobârnac C. M., 79, 80, 81, 82, 83.
Bocu S., 50.
Boerescu P. G., 10, 12, 19, 32, 34, 35, 45, 46, 69, 72, 84, 93, 131.
Boiangiu S., 116.
Bolgar V. D., 57.
Bolyai, 126.
Bonea I., 79, 80.
Borda (Chevalier de), 115.
Borelli A. G., 126.
Borneanu G., 135.
Botea G. N., 17, 79, 80, 83, 91.
Botez M., 1.
Bouligand G., 44.
Brădeţeanu C. C., 79.
Brăileanu A., 79.
Brătăşanu A. G., 81.
Brătescu H. M., 80, 83.
Bratu Gh., 16.
Breazu D., 1.
Brocard, 43.
Brotmann I., 9.
Brunschwig L., 126, 127.
Budeanu C., 17.
Bugeanu C., 12, 28, 32, 34, 35, 36, 46, 69.
Bugeanu O., 24
Buicliu Gh., 1, 3, 4, 5, 9, 12, 13, 16, 17, 24, 30, 36, 48, 89, 90, 107, 114, 117, 124, 127, 138.
Bujoreanu V., 10, 12, 19, 20, 32, 34, 35, 45, 46, 67, 129, 131.
Bunescu A., 115.
Burghele B., 1.
Buşilă A. A., 79.
Butoescu T., 1.

Calley M., 83.
Călugăreanu G., 16, 56.
Cândea C., 1.
Capriel H., 90.
Carafoli E., 17.
Caraman E., 1, 80.
Cârdeiu V., 1.
Carlman M., 16.
Carnot, 116, 126.
Carp I. Ig., 17.
Cauchy A., 115.
Ceva, 56, 61.
Cezaro, 99.
Chappuis A. P., 44.
Chasles M., 115.
Chirilă V. Gh., 10, 21 23, 28, 34, 35, 36, 46, 60, 127.
Chirilov P. V., 23, 32.
Chiriţă Gh., 10.
Chivu S. I., 106, 137, 138.
Chivulescu C., 1.
Choişy A., 115.
Ciancilian A., 69.
Cica Gh., 1.
Cincilian A., 58, 106, 129, 131, 132.
Cincilian P., 45.
Cioclov Gh., 79.
Ciolacu S. M., 79.
Cioranescu I. C. 79, 83.
Ciorănescu N., 17, 65.
Cismarde I., 116.
Cismarescu M. 1.
Ciupe A., 130.
Ciurceu V., 1.
Ciută G. 79, 81.
Claudian V., 109.
Cocorandu M., 80.
Coculescu N., 16.
Codreş I. F., 10, 93, 95, 107, 120, 130, 131.
Coliu A., 50.
Coman A., 1, 108, 132, 138.
Commandino F., 126.
Comte A., 126.
Constantinescu Gh., 1.
Constantinescu I., 17.
Constantinescu P. M., 69, 72, 105, 117, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 137, 138.
Corneanu P., 1.
Corşoreanu Gh. Gh., 83.
Coşereanu I., 79, 80, 81, 82, 83.
Coşniţă C., 9, 10, 12, 21, 24, 28, 29, 30, 31, 34, 36, 46, 56, 58, 59, 60, 61, 70, 83, 93, 94, 95, 103, 105, 106, 116, 117, 119, 120, 121.
Costache N., 11, 19.
Costăchescu C. C., 36.
Costăchescu V. C., 9, 10, 11, 12, 23, 83.
Cozacincu A. V., 79.
Crăciunescu I., 1.
Cristali Gh., 21.
Cristescu C. I., 35.
Cristescu I., 135.
Cristescu V., 8, 56.
Crivăţ I. V., 10, 11, 12, 19, 21, 23, 24, 32, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 60, 67, 68, 69, 71, 72, 92, 93, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 137, 138.
Criveanu R., 44.
Cuciureanu St. 10, 12, 34, 35, 36, 47, 68, 71, 93, 95, 106, 107, 118, 120.
Curchi I., 68, 72, 84, 108, 115, 130, 131, 132, 137, 138.

Dănciulescu Gr. V., 66, 67, 116.
Dângă S. V., 83.
Darboux, 28.
Dăscălescu S. H., 10, 12, 21, 22, 35, 69, 70, 71, 72, 93, 94, 95, 116, 117, 128, 129, 130, 131, 137.
David I. L., 67.
Davidoglu A., 16.

[1]) Numerele care urmează după nume, arată paginele în care se găsesc publicate numele.

Demetrescu Gh., 1,
Derenbaum M., 34, 35, 36, 46, 47, 58, 60, 68, 69, 92, 93. 105, 106, 107, 117, 118.
Descartes, 127.
Diaconescu S. A., 60, 68, 116.
Diaconescu N., 1.
Dima L., 44.
Dimitrescu F., 81.
Dimitriu Gh. C. 10, 11, 12, 21, 46, 47, 69, 72, 93, 129, 132.
Dimitriu-Arad I., 1.
Dimitriu A. I., 9, 10, 12, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 35, 44, 46, 47, 48, 59, 60, 67,, 68, 69, 70, 71, 72, 79, 92, 94, 95, 106, 116, 127.
Dinu S. D., 116.
Dobrescu B., 79.
Dobromireanu P., 116.
D'Ocagne M., 115.
Donciu T. N., 23, 60, 72, 130.
Dordea A. T., 1, 56, 83
Dorneanu G. V., 80, 83.
Dospinoiu N., 80, 81.
Dragalina C., 1.
Dragomirescu E., 79.
Drăguț G. V., 57.
Drinceanu A. B., 21.
Droz F., 8, 90.
Dumitrescu Elena, 105.
Dumitrescu Gh., 1.
Duțulescu M., 1.

Emanuel D., 17.
Ermil M., 116.
Euclid, 125, 126, 127.
Euler, 59, 65, 70, 79, 116.

Fermat P., 99, 115.
Feuerbach, 56.
Filipovici j., 129, 137.
Firoiu I., 21, 23, 32, 34, 35, 45, 58, 60, 129, 131.
Florea C. A., 79.
Florea N., 79.
Florescu I. B., 44, 135.
Florescu M., 1.
Floricescu S. N., 21.
Foch (Mareșalul), 115.
Focșeneanu I. M, 79.
Fourrier, 126.

Gabrielescu C. V., 79, 80, 83.
Galois Evariste, 115.
Garoafă P., 79.
Gataianțu V. B., 79.
Geminos, 126.
German C., 81.
Georgescu C., 19, 20, 68.
Georgescu P. C., 79, 81, 83.
Georgescu D., 1, 44.
Georgescu E. F., 79.
Georgescu T. P., 57, 129, 130.
Georgescu I. N. V., 79, 80.
Georgescu-Roegen N., 90.
Georgescu-Val N. I., 82, 83.
Gheorghe M., 116.
Gheorghiev N., 116.
Gheorghiu A., 116.
Gheorghiu T. Gh., 79, 80, 83, 115.
Gheorghiu Gh. L., 80.
Gheorghiu Ș., 83.
Ghermănescu M., 1.
Ghermani D. M., 17, 50.
Ghilezan A. A., 93, 94, 95, 105, 106, 117, 118, 119, 128.
Ghișoiu I. P., 9, 10, 17, 19, 21, 23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 46, 47, 57, 58, 59, 60, 67, 68, 70, 71, 79, 83, 92, 93, 94, 95, 103, 106, 115, 116, 117, 118, 125, 127, 130, 131.
Ghițescu V., 79, 81.
Giotta V., 79.
Golcea C., 83.
Goldenberg M. I., 80, 96.
Golestein M. I., 83.
Gonseth F., 127.
Georgmagtigh R., 8, 43.
Grabovsky E., 83.
Fradin I. Gh., 83.
Grecu M. C., 10, 11, 12, 19, 23, 34, 36, 45, 46, 60, 67, 68, 69, 71, 95, 129, 132.
Grinberg M., 58, 68, 69, 72, 105, 127, 128, 129, 130.
Grofșoreanu I. Gh., 79, 83.
Grossu I., A, 12, 28. 59, 130, 132, 138,
Grossu I. M., 9, 22, 23, 32, 47, 48, 58. 72, 103, 105.

Haldner M., 81.
Haldun M., 80.
Hamerak C., 9, 29, 103, 117.
Hangan M., 17.
Hermite 135.
Hippocrate, 125.
Hohoi V., 116, 117.
Hollinger A. 108, 120.
Hopital, 59.
Hristea H., 1.
Hubert M., 1.
Hulubei D., 16.

Ignat I. P., 116, 117.
Iliescu D. E., 79, 84.
Iliovici Gh. C., 117.
Iliuță-Dăbuleni I., 9, 57.
Ioanițescu Gh. D., 10, 11, 12, 19, 23, 34, 35, 45, 46, 47, 67.
Ionescu A., 12, 34, 35.
Ionescu C. C., 116, 117.
Ionescu K. C., 1.
Ionescu P. H., 8, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 22, 23, 24, 32, 34, 35, 37, 44, 45, 46, 47, 48, 54, 60, 65, 67, 68, 69, 71, 79, 92, 93, 94, 95, 99, 106, 107, 117, 128.
Ioneseu V. Gh., 81.
Ionescu I., 17. 50
Ionescu B. I., 79.
Ionescu C. I, 10, 11, 12, 23, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 67.
Ionescu D. I., 69, 72, 93.
Ionescu Gh. I., 79.
Ionescu I. L., 79.
Ionescu I P., 79, 84.
Ionescu D. V., 16.
Ionescu-Biss P. H., 103.
Ionescu-Brezuica I. 79, 84.
Ionescu-Bujor C., 72.
Ionescu-Țiu D. C., 9, 17, 19, 28, 29, 67, 82, 103, 116.
Ionescu V., 127.
Ioniță E. V., 10, 22, 23.
Iotta D. M., 10, 35, 47.

Jeannel R., 44.
Jeba C., 69, 71, 72, 93, 94, 105, 106, 118, 119, 120, 128, 129, 130, 131, 136.
Jecu M. I., 1.
Julia G., 56.
Julia M., 16.

Kant, 125.
Karamata I., 16.
Katz P., 79, 80, 81, 82, 83, 84.
Kielburger M., 116.
Kirchoff., 25.
Klein S., 80.

Lagrange L., 115, 126.
Laissant A. C., 122.
Lalan V., 16.
Lalescu N., 50.
Lalescu T., 3, 5, 6, 17, 49, 50, 51.
Lambrino Gh., 135.
Laplace S. P., 16, 115, 126.
Lascu I., 93, 106, 137, 138.
Lăzărescu St., 80.
Legendre, 126.
Leibovici M., 34, 36, 46.
Leibnitz, 119, 125.
Lelescu L., 84.
Lelieuvre, 16.
Leonida D., 1.
Lemoine 134, 135.
Lepădatu I. M., 79.
Levi-Civita, 16.
Linteș I., 1, 7. 8, 75, 97, 102.
Liteanu Gh., 115.
Lobatschefsky, 126, 127.
Lucian I. D., 10, 11, 12, 22, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 69.
Lungan I. D., 19.
Lupan A., 1.
Lupescu Gh. C., 12, 19, 21, 23, 32, 34, 35, 36, 46, 58, 60, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 93, 105, 106, 117, 118, 127, 128, 129, 130, 131, 137.

Macarovici G. C., 43.
Magheru I., 1.
Malcoci C., 8.
Mallasz j. (de), 44.
Mandelbroit S., 16.
Manolescu I. N., 79, 84, 116.
Manughevici C., 1.
Mărășescu I., 116.
Marcu A., 10, 12, 23, 33, 34, 35, 46, 47, 59, 60. 68, 69, 70, 71, 72, 93.
Mardan D., 1.
Mărgineanu I., 12, 24, 32, 36, 48, 57, 60, 67, 86, 120, 138.
Marineanu Tr., 10, 11, 17, 19, 22, 34, 36, 45, 57, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 84, 92, 93, 94, 95, 96, 101, 105, 107, 113, 115, 120, 128, 129, 130, 131, 132. 137, 138.
Marinescu M. I., 80, 84.

Marşieu T., 12, 23, 33, 34, 35, 36, 46, 47, 58, 59, 60, 68, 69, 70, 71, 72, 94, 95, 96, 105, 106, 117, 128, 129, 130, 131, 132, 136, 137, 138.
Măru D., 79, 81.
Mateescu C., 17.
Mătieş V. I., 90.
Mecu I. I., 46, 72, 93, 129.
Medrea, 49.
Mehedinţi D., 129, 131, 137.
Menelaus, 61.
Mercescu I., 17.
Mereuţă E., 10, 11, 19, 21, 22, 23 24, 30, 32, 34, 36, 45, 46, 47, 48, 58, 59, 60, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 84, 93, 94, 95, 105, 106, 108, 115, 118, 120, 128, 129, 130, 131, 132, 136, 137, 138.
Miclescu A., 79, 84.
Micula O., 116, 117.
Mihăiescu D. C., 80, 84.
Mihăileanu M., 68.
Mihăileanu N. N., 10, 12, 21, 22, 31, 32, 33, 34, 35, 46, 59, 60, 67, 71, 94, 95, 96, 105, 106, 117, 128, 129, 130, 131, 132, 135, 136, 137, 138.
Mihăilescu N. N., 11, 58, 105, 106, 118, 120.
Mihalcea E., 17.
Mihălceanu N. N., 10, 19, 45, 47, 69.
Mihaly E., 2.
Millea G. E., 10, 12, 19, 22, 23, 35, 45, 67.
Mioc V., 2.
Moisil C. I., 79.
Moisil C. Gr., 16, 17.
Monge G., 115, 126.
Montel P. 16, 56.
Moraru P. E. D-şoara, 34, 35.
Morţun A. C., 116.
Morţun E., 79.
Motoc D. M., 10, 11, 12, 19, 22, 32, 34, 36, 44, 45, 46, 47, 67, 69, 72, 92, 03, 105, 106, 117, 128, 129, 130, 131, 138.
Murăroiu I., 16, 27, 33, 36, 67, 68, 73, 116.
Murgulescu G. I., 44.
Musta Şt., 84.
Myller A., 16.
Myller Lebedeff Vera, 16,

Nagler M., 11, 69, 93.
Nadaşan Şt., 135.
Naneş Gh., 2.
Napoleon, 115.
Nazir E., 126.
Necu I. I., 12.
Negoescu A. I., 12, 35, 67.
Negrea A. M. L., 10, 12, 22, 23, 35, 47, 59, 50, 60, 68, 70, 71, 95, 96, 106, 107, 128, 129, 130, 131, 136.
Negrescu A. I., 23.
Negreţu F., 80.
Neştianu Gh. Gh., 80, 84.
Neuberg I., 8.
Nichifor A. Gh., 2, 115.
Nichiforescu Gh, 11, 19, 29, 45, 92.
Nicolaescu St., 129, 131.
Nicolau A., 2.
Nicolau Dobridor I., 47.
Nicolau P., 2.
Niculescu Al., 28, 43, 51, 80, 135.
Niculescu Cr., 2.
Niculescu I., 79.
Niewenglowski B., 48.
Noaghea Gh., 2.
Novac A., 116.
Novac V., 116.

Oelze E., 10, 12, 22, 23. 35, 36, 46, 47, 59, 60, 68, 69, 70, 71, 72, 93, 96, 106, 118.
Oncica I., 2.
Onicescu O., 2, 16, 17, 43.
Oprişan I. G., 81, 83.
Orăşeanu C., 2.
Orăşeanu Gr., 2.
Orbonaş I., 84.
Otopeanu C., 2.

Paliţa C, 34, 35.
Panait N. T., 116, 117.
Panaitescu I., 116.
Panaitescu Sc., 8.
Pangrati A. E., 17.
Pantazi G D., 80.
Panţu Z. I., 116.
Papelier G., 56.
Pappus, 51, 54.
Pârăianu N., 79.
Parepeanu I., 22, 23, 45, 47, 58, 60, 68, 69, 71, 72, 93, 95, 106, 107, 120, 128, 129, 130, 131, 137, 138.
Pârvulescu Şt., 116.
Pascal Blaise, 115.
Pascaru I., 137, 138.
Pătroianu M., 79.
Patron M., 10, 11, 12, 23, 32, 34, 35, 36, 45, 46, 47, 67, 69, 70, 93, 95, 128.
Pavel D., 17.
Pavel N., 12, 66, 71.
Percea V., 80.
Perron M., 16.
Petrescu A., 2.
Petrescu I., 10.
Petrescu Tr., 10.
Petrică I. I., 67.
Petricoane D. M., 2.
Petrovici D., 20.
Petrulian S. N., 79.
Picard E., 17, 115.
Piperescu M., 10, 23.
Pisai Gh., 137, 138.
Podariu A., 116.
Pogăceanu S., 22, 32.
Poincaré, 127.
Pompeiu D., 16, 43, 127.
Poncelet V. J., 115.
Pop L., 12, 34, 104.
Popa Gh. I., 10, 11, 12, 17, 19, 22, 23, 24, 32, 34, 35. 36, 41, 44, 46, 47, 48, 58, 60, 67, 68, 69, 71, 72, 79, 92, 93, 95, 105, 106, 107, 114, 120, 128, 129, 130, 131, 132, 136, 138.
Popea G. O., 81, 94.
Popeanu A., 80
Popescu O. A., 116.
Popescu N. C., 84.
Popescu E., 2.
Popescu P. E., 79.
Popescu Gh. Gh., 10.
Popescu Iancu, 80.
Popescu D. I., 22.,
Popescu O. I., 10, 23.
Popescu V. M., 11.
Popescu Şt., 79.
Popovici A,, 84.
Popovici C. C., 16, 79.
Popovici Gh. A. C., 84.
Popovici P. D., 79, 84.
Popovici C. I., 79.
Popovici T. I., 80, 81, 83. 84.
Popovici M., 116, 117.
Popovici Gh. V., 29, 34, 46, 68.
Popoviciu T., 7, 65, 70, 115.
Posldonius, 126.
Presbiterianu D. M., 69.
Proca A., 16.
Protopopescu I., 2, 36, 45, 60, 105, 128.
Ptolomen 126.
Pupezescu Gh. I., 10, 11, 12, 22, 23, 33, 35, 47, 59, 60, 69, 105, 106, 107, 117, 119, 12 , 128, 130.
Purcariu I., 2.
Purdilă A., 10, 11, 12, 22, 23, 34, 35, 46, 47, 58, 60, 68, 72, 84, 93, 95, 96, 106, 107, 128, 129, 129, 130, 131, 137, 138.
Puta T., 70, 71.

Racliş N R., 2, 17, 50, 56.
Rădulescu P. M., 84.
Rădulescu B. R., 84.
Rădulescu P. S, 80, 84.
Rădulet R., 135.
Raicef G. R., 10, 21, 22.
Rameder C., 46, 68.
Râmniceanu I. C., 79, 81, 84, 116, 117,
Răşcanu I., 6.
Reymond A.. 127.
Riemann, 127.
Rigani Cr., 79.
Ripan I., 44.
Röder C., 80.
Roibănescu C., 2, 81.
Roman I. I., 116, 117.
Rosenblatt A., 16.
Russu L., 22, 29, 93, 120.
Russu D. C., 35, 45, 46, 58, 60, 69, 93, 95, 105, 106, 107, 118, 120, 128, 129, 130, 131, 132, 136, 137, 138.

Saccheri G., 126.
Saegin E., 2.
Saks S., 16.
Sandor A.. 135.
Sâmbotin G., 11, 12, 23, 35, 36, 46, 47, 132.
Sanielevici S., 16.
Sarrus 125.
Sasărman S. E., 93.
Saur I., 23, 34, 35, 48, 70.
Savin A., 116, 117.
Savin C. I., 69. 70, 72, 79, 81, 84, 92, 93, 94, 95, 96, 107, 116, 117, 128, 130, 131, 132.
Savin C. P., 69, 70, 93, 94.

Scarlat D., 9, 10, 21, 22, 45, 68, 104, 105.
Schilleru C. D., 79.
Schileru-Dili C. I., 120.
Schneider Th., 34, 46.
Schneier L., 47.
Schuller D., 19.
Scodrona A., 80.
Scorușianu E., 79.
Scripcă L., 79, 84.
Scripcă M., 116.
Scurtu O. N., 116, 117.
Secăroiu D., 65, 67.
Șerban-Ulmeni D., 10, 19, 67.
Șerbănescu D., 2.
Sergescu P., 2, 16, 17, 31.
Severineanu C., 2.
Sierpien-ki W., 16.
Silion G. I., 7 , 80, 84.
Simionov P. K., 84.
Simniceanu S., 2.
Simson, 8.
Smărândoiu N., 69, 72, 129.
Smigelschi O., 80, 84.
Solacolu Șt., 79.
Soula j., 16.
Spacu G., 42, 44.
Spineanu C., 2.
Stamatiu I. M., 79, 80, 84.
Stan I. A., 24, 84, 90, 108, 116.
Stăncescu C., 2
Stănciulescu G., 80.
Stănescu A. N., 79.
Steblea S. Șt., 84, 115.
Stefănescu A., 22, 23, 28, 34. 46, 68.
Ștefănescu E., 79, 84.
Ștefănescu-Goangă A., 69.
Stewart 121, 122.
Știopu P., 10, 22, 57.
Stoenescu I. A., 79.
Stoenescu I., 79.
Stoicescu I. E., 105, 117, 128, 129,130, 131, 132, 137, 138.
Stoicescu M., 2.
Stoilov S., 16.
Suciu G., 44.
Sudan G., 16.
Sturm, 16.

Tanovici V. C., 79.
Tărăbuță C. P., 79, 80, 81, 83, 84.
Tăraș V., 80, 84.
Tauber A., 80, 83, 84.
Taylor, 16.
Teodorescu C., 2, 3, 13, 25, 37, 49, 61, 75, 86, 97, 109, 121, 135.
Teodorescu N., 44.
Teodorescu Șt. 10, 12, 22, 23, 28, 32, 34, 36, 45, 46, 48, 69, 70, 72, 93, 95, 138.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 8. 28, 56, 90, 114, 128.
Thierrin G., 2.
Toussaint A., 135.
Țino O., 2, 3, 60, 92, 103, 104, 105, 108.
Țițeica Gh., 16, 17.
Titu V., 50
Țiucra M., 10, 19, 23, 33, 35, 45, 67, 94, 95, 96, 118, 119, 120. 130, 132, 136.
Țiucra (Protopopul), 50.
Tscherbycheff, 16.
Tutoveanu V., 11, 12, 19, 23, 30, 34, 35, 36, 45, 47, 48, 105.

Udrisky T., 79, 80, 81, 84.
Ungheanu M., 10, 11, 12, 19, 36, 45, 67.
Urzică A., 84.

Vâlceanu N. j., 9, 12, 20, 23, 28, 29. 30, 32, 34, 35, 45, 48, 57, 59, 72, 103, 104, 107, 116, 117.
Vâlcovovici V., 2, 3, 6, 8, 16, 17, 50, 56, 65, 135.
Văleanu N., 17, 33.
Varopoulos Th., 16, 43.
Vasilescu M., 84.
Vasiliu Al., 46, 48, 60.
Vasiliu Gh. 2.
Vasiliu Gh. Gh., 116, 117.
Vasiliu I., 12, 34.
Vasiliu C. I., 79, 83, 84.
Vasiliu M., 2.
Vasu V., 93, 94, 107, 118, 128.
Vătașanu O., 80.
Velicescu N. N., 84, 93, 95, 96, 128, 130, 131, 136.
Velicescu G. T., 12, 22, 23, 34, 35, 69, 72, 93, 94, 95, 96. 106, 128, 129, 130, 131, 136.
Verne Jules, 115.
Viète Fr., 115.
Vitale G., 126.
Vlad I. V., 2.
Vlădescu I., 50.
Vlăduțu S., 84.
Vonica C. I., 10, 137, 138.
Volterra V., 15, 51.
Vrânceanu G., 17.
Vuibert H., 44.

Weiss L., 79, 81.
Weiss S., 79, 84.
Weissmann M., 22, 69, 72, 105, 117, 128, 129, 130, 131, 132, 137, 138.

Zagaican I., 26.
Zaharia O. N., 78, 79, 116, 117, 133.
Zaharia O. R.. 127.
Zamfir D., 12, 34.
Zamfirescu Gh., 8, 116.
Zapan Gr., 2, 79.
Zuckermann A., 80.

Abonamentul pe anul X-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Rugăm a ni se trimete de urgentă costul abonamentului pentru „R. M. T." pe anul XI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

5 lei